Spigolature astronomiche*

A cura di Annibale D'Ercole
INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS)

Le leggi di scala

Annibale D'Ercole

I PRIMI studi sulle leggi di scala e sui loro effetti sono dovuti a Galileo (1564-1642), che indagò (tra le molte altre cose) come mai gli animali hanno ben precise dimensioni e non ne esistono versioni "giganti".

Prima di vedere come lo scienziato affrontò la questione è bene richiamare alcuni punti concernenti l'operazione di ingrandimento (o riduzione) di un oggetto. Dal momento che la superficie S e il volume V variano, rispettivamente, con il quadrato e con il cubo della dimensione lineare dell'oggetto, il rapporto S/V non rimane costante durante l'ingrandimento ma varia come mostrato (e dimostrato) in FIG. 1; dunque S aumenta, ma più lentamente di V. Le formule in questa figura mostrano anche che l'ingrandimento di oggetti diversi non cambia l'andamento di S con V ma solo il coefficiente di proporzionalità.

Essendo poi $M = \varrho V$, dove M è la massa del corpo e ϱ la sua densità (costante), possiamo riscrivere le formule presenti in FIG. 1 come

$$S \propto M^{2/3} \tag{1}$$

e

$$\frac{S}{M} \propto M^{-1/3}. \tag{2}$$

Queste formule, ottenute mediante l'utilizzo di semplici solidi regolari, valgono anche per corpi complessi purché l'ingrandimento sia *isometrico*, ossia quando le reciproche proporzioni lineari delle varie parti vengono preservate; nel caso illustrato in

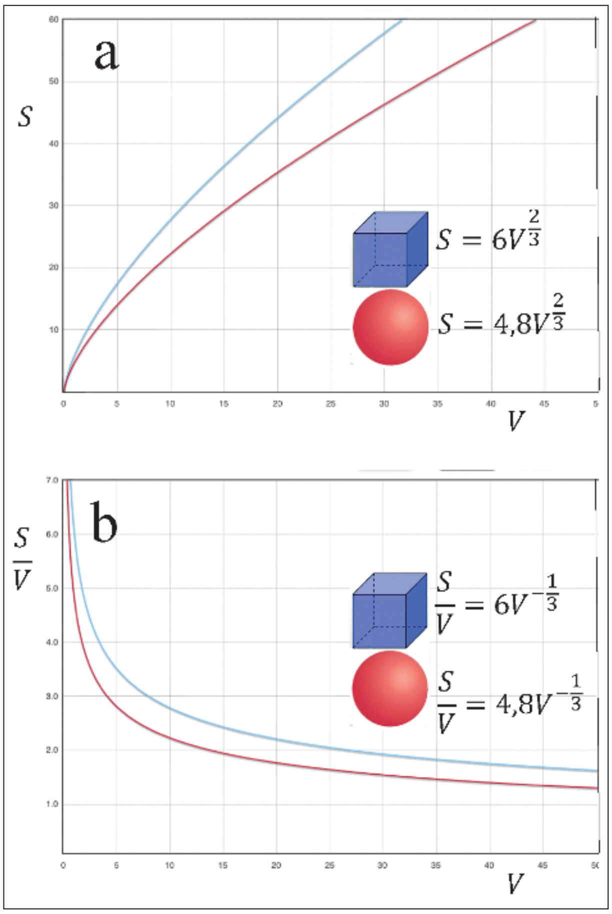

FIG. 1. **a**) Relazione tra la superficie S e il volume V per il cubo e la sfera. Se l è la lunghezza dello spigolo del cubo, abbiamo $S = 6\,l^2$, $V = l^3$. Dalla formula del volume otteniamo $l = V^{\frac{1}{3}}$ che, inserita nella formula della superficie, dà luogo a $S = 6\,V^{\frac{2}{3}}$. Se ripetiamo lo stesso ragionamento per una sfera di raggio l otteniamo $S = 4{,}8\,V^{\frac{2}{3}}$. Dunque, l'andamento di S al variare di V rimane lo stesso e cambia solo il coefficiente di proporzionalità. Dal momento che l'esponente $\frac{2}{3}$ è minore di 1, ingrandendo il solido il suo volume cresce più rapidamente della superficie, come si capisce dall'andamento delle linee blu e rossa. **b**) Quest'ultima affermazione è ulteriormente evidenziata in questo pannello che rappresenta l'andamento di S/V al crescere di V.

FIG. 2a, ad esempio, la lunghezza della mucca ingrandita è (circa) quattro volte la lunghezza della sua zampa anteriore, così come nella mucca originale. L'ingrandimento isometrico ci restituisce

* Questa rubrica – iniziata nel 1999 e che ha superato i novanta numeri – si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare a un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html.

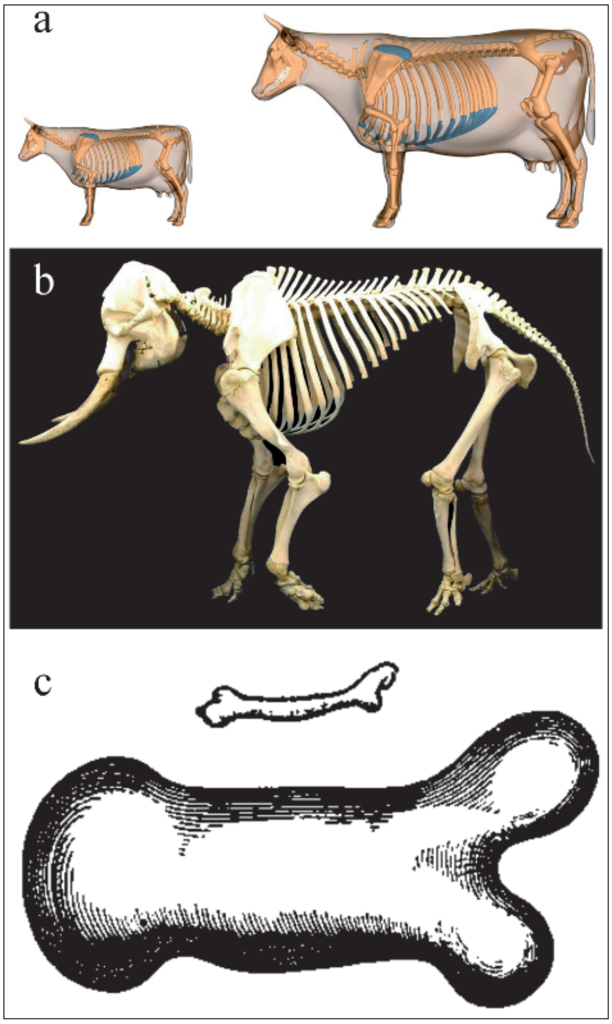

Fig. 2. **a**) Ingrandimento isometrico di una mucca: tutte le diverse parti mantengono le stesse reciproche proporzioni della mucca originale. **b**) Un elefante, molto più pesante di una mucca, possiede ossa più tozze. **c**) Disegno originale di Galileo che paragona l'osso di un animale piccolo con quello di uno grande che appare più robusto per via delle diverse proporzioni tra spessore e lunghezza.

quindi una "supermucca" del tutto simile a quella reale (dimensioni a parte) che però non esiste in natura. Come mai? È tempo di tornare a Galileo.

Egli capì che gli animali (ed anche oggetti inanimati) hanno ben precise dimensioni che non possono essere ingrandite arbitrariamente in maniera isometrica perché differenti attributi (come massa, superficie, lunghezza) seguono diverse leggi di scala [Fig. 1 ed eqq. (1), (2)]. Nel suo libro *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* il genio pisano giunse alle sue conclusioni studiando gli scheletri dei mammiferi avendo in mente che la resistenza di un osso è, al pari di quella di una trave, proporzionale alla superficie della sua sezione trasversa.[1] In una crescita isometrica il diametro di un osso cresce proporzionalmente alla dimensione lineare di un animale e di conseguenza l'area della sua sezione trasversa aumenta in proporzione alla superficie S dell'animale stesso. Ma la massa M di quest'ultimo cresce più velocemente [eq. (1)] e pertanto oltre un certo limite le ossa non sono in grado di sostenerne il peso (e dunque la supermucca non può esistere). Al contrario, più l'animale è piccolo, maggiore è la capacità di sostegno del suo scheletro relativamente al peso. Per dirla con Galileo: «... onde io credo che un piccolo cane porterebbe addosso due o tre cani uguali a sé, ma non penso già che un cavallo portasse né anco un solo cavallo, a se stesso uguale». Pertanto i grandi animali, per potersi sostenere, hanno necessità di ossa più tozze (Fig. 2b), come illustrato dallo stesso Galileo (Fig. 2c). Approfondiremo questo punto nel livello avanzato.

Diverso è il caso degli enormi animali acquatici come le balene, le quali sono sottoposte ad una gravità effettiva minore a causa della spinta di Archimede e hanno quindi ossa relativamente sottili (un aspetto già notato da Galileo). Se quindi ad una balena sfortunata capita di spiaggiarsi, essa soffoca sotto il suo stesso peso (350-400 t) perché lo scheletro non è in grado di sostenerla adeguatamente.

Nel mondo animale il rapporto S/V o S/M gioca altri ruoli importanti. Tramite il proprio metabolismo[2] un animale, nutrendosi, produce calore ad un tasso R.[3] Per mantenere costante la temperatura è dunque necessario disperdere questo calore attraverso la superficie S del corpo allo stesso tasso R con cui è generato. D'altra parte la dispersione è proporzionale ad S (raddoppiando la superficie raddoppia il flusso di calore verso l'esterno), dunque deve essere $R \propto S$; pertanto, in base alle eqq. (1) e (2), si ottiene[4]

$$R \propto M^{2/3}, \tag{3}$$

e

$$\frac{R}{M} \propto \mathrm{M}^{-1/3}. \tag{4}$$

Quest'ultima relazione mostra il metabolismo per unità di massa, ossia la quantità di energia necessaria per mantenere le funzioni vitali di un grammo di

[1] Probabilmente la sua conoscenza della resistenza delle travi derivava del suo interessamento alle tecniche di costruzione delle navi (da cui dipendeva la potenza di Venezia) durante gli anni trascorsi nella Serenissima.

[2] Il metabolismo, sostenuto dall'alimentazione e dalla respirazione, è l'insieme delle reazioni chimiche che producono l'energia necessaria al mantenimento di un organismo. In questa nota ci riferiremo al metabolismo basale, ossia il minimo dispendio energetico necessario a mantenere le funzioni vitali e lo stato di veglia.

[3] Il tasso R rappresenta la quantità di calore prodotta nell'unità di tempo.

[4] Queste relazioni furono proposte nel 1839 dal matematico Pierre Frédérique Sarrus (1798-1861) e dal fisiologo Jean-François Rameaux (1805-1878). Successivamente, nel 1932 il fisiologo svizzero Max Kleiber (1893-1976) trovò empiricamente che su un vasto intervallo di masse (dai batteri alle balene) vale invece la relazione $R \propto M^{3/4}$, nota, appunto, come "legge di Kleiber". Recentemente, tuttavia, alcuni studiosi hanno rivalutato la relazione $R \propto M^{2/3}$ sulla base dei miglioramenti delle misure empiriche e degli studi teorici del tasso di metabolismo. La distinzione tra i due esponenti non è una pignoleria – come potrebbe apparire ai non addetti ai lavori – ma è profondamente legata al tipo di "funzionamento" degli organismi viventi. Noi qui non siamo interessati a questa *querelle* ma "soltanto" al fatto che R sia legato a M da una legge di potenza e assumiamo, conservativamente, che l'esponente sia 2/3.

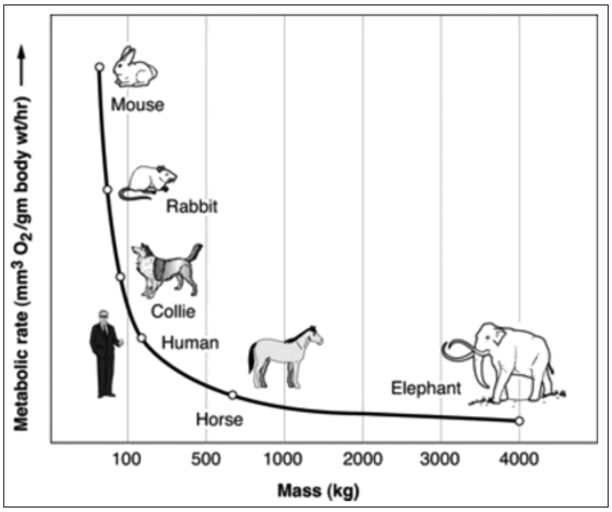

Fig. 3. Il grafico rappresenta l'andamento del tasso di metabolismo basale per un grammo di massa corporea per vari mammiferi in funzione della loro massa. È presente un errore "artistico" in quanto le posizioni delle figure del topo e del coniglio sono scambiate tra loro.

massa corporea nell'unità di tempo. Pertanto, mentre l'eq. (3) afferma che gli animali più grandi hanno ovviamente un metabolismo maggiore, l'eq. (4) mostra che sono gli animali più piccoli a consumare più energia per ogni grammo del loro corpo (Fig. 3). Un elefante africano (~6000 kg) consuma ogni giorno circa il 4% del proprio peso corporeo in cibo, mentre un topo (~20-25 g) deve mangiare circa il 10-15% del suo peso al giorno.

Le eqq. (3) e (4) sono interessanti perché sono in grado di interpretare due regole empiriche riscontrate nel mondo animale: la prima afferma che gli animali di massa maggiore vivono più a lungo e la seconda – evidenziata dal biologo tedesco Carl Christian Bergmann (1814-1865) nel 1847 e detta per questo "regola di Bergmann" – asserisce che, all'interno di una stessa specie, la massa corporea aumenta negli ambienti più freddi; in pratica, a latitudini maggiori le specie tendono ad essere più grandi rispetto a latitudini più basse. Entrambe queste regole sono delle generalizzazioni per via delle numerose eccezioni, tuttavia indicano due tendenze effettivamente presenti in natura (Fig. 4).

Per quanto riguarda la longevità, in base all'eq. (4) e al commento che ne è seguito risulta, p.e., che il metabolismo del topo è accelerato rispetto a quello dell'uomo che ha una massa maggiore. Le frequenze cardiache (600/minuto) e respiratorie (200/minuto), ad esempio, sono ben più alte di quelle umane (60-100/minuto e 16-20/minuto), pertanto il "motore", sottoposto ad una usura maggiore, ha una durata minore: la vita media del topo è 1-3 anni e quella dell'uomo è circa 80 anni (i dati dipendono dall'ambiente in cui si vive).

In quanto alla regola di Bergmann, la spiegazione data dallo stesso biologo tedesco fu che gli animali di maggiori dimensioni hanno un rapporto S/V minore rispetto agli animali più piccoli [eq. (2)], quindi

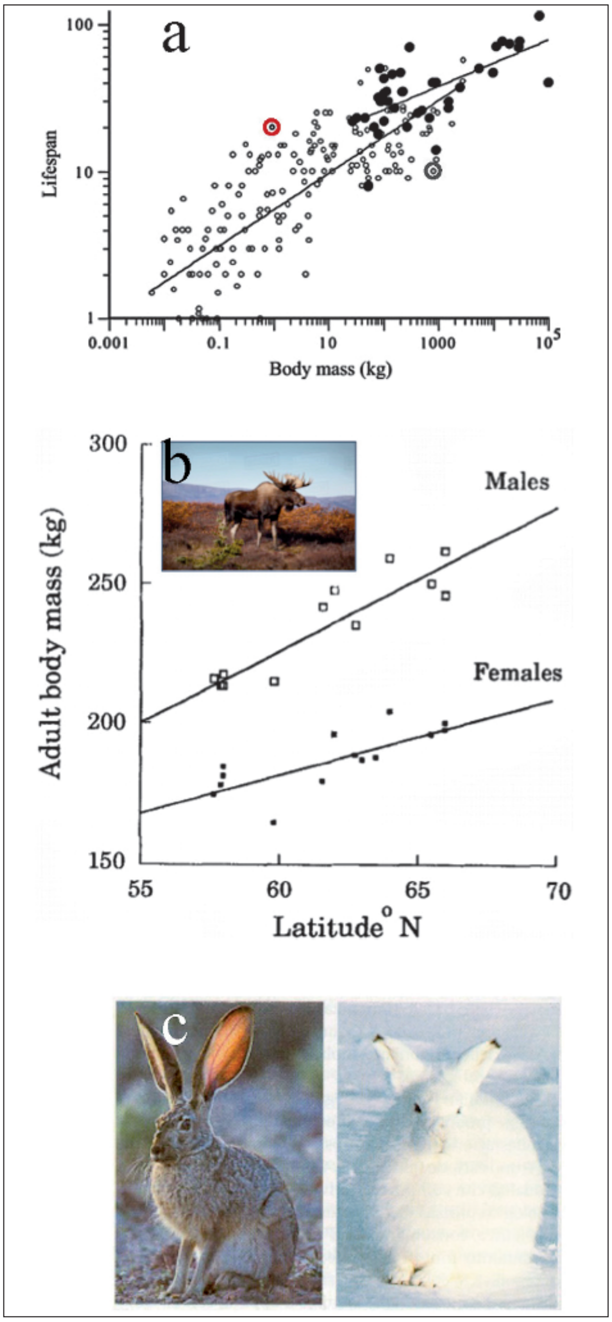

Fig. 4. **a**) I cerchi vuoti rappresentano mammiferi terrestri e quelli pieni mammiferi oceanici. L'ascissa e l'ordinata (entrambe in scala logaritmica) indicano, rispettivamente, la massa (in kg) e la longevità (in anni) degli animali. I dati sono sparpagliati, e le due rette rappresentano una specie di media (in termini tecnici, una *regressione lineare*) indicante l'andamento generale. Se tutti i dati fossero posizionati su queste rette si potrebbe parlare di una vera e propria legge secondo cui la longevità dei mammiferi terrestri e di quelli acquatici aumenta con la loro massa M ed è proporzionale, rispettivamente, a $M^{0,25}$ e $M^{0,16}$. Lo sparpagliamento, invece, evidenzia eccezioni a questa regola; p.e., il dato cerchiato in rosso rappresenta un animale che pesa circa 1 kg e vive 20 anni mentre quello rappresentato dal cerchio blu vive la metà pur pesando 1000 volte di più. **b**) Il grafico indica la regola di Bergmann nel caso degli alci norvegesi maschi (quadratini) e femmine (puntini). In ascissa abbiamo la latitudine e in ordinata il peso. Come nel caso **a**), è presente uno sparpagliamento dei dati mentre le due rette indicano l'andamento generale per cui gli animali più pesanti si trovano a latitudini maggiori dove il freddo è più pungente. **c**) Un esempio "pratico" della legge di Bergmann: a sinistra abbiamo l'immagine di una lepre americana che vive al caldo, e a destra quella di una lepre artica. La prima ha orecchie estese e un corpo snello (alto S/V per favorire la dissipazione del calore). La seconda ha orecchie e arti ridotti per diminuire S/V; inoltre ha un corpo "tondeggiante" perché per un dato volume la sfera è il solido con la superficie minore.

disperdono il calore più lentamente e si trovano avvantaggiati nei climi più freddi, mentre gli animali di piccole dimensioni sopravvivono meglio in climi caldi per via della loro maggiore capacità di disperdere velocemente il calore (Fig. 4c).

Come abbiamo già detto, queste regole hanno numerose eccezioni dovute alla pressione evolutiva. L'elefante, ad esempio, rappresenta una clamorosa eccezione alla regola di Bergmann perché, pur essendo tra i maggiori mammiferi terrestri, vive in climi caldi. Questo è dovuto alla superficie delle sue grandi orecchie che contribuisce efficacemente alla dispersione di calore.

In queste pagine abbiamo visto come elementari leggi di scala possono spiegare alcuni fenomeni o portare ad alcune conclusioni importanti. Tuttavia, nel concludere questo livello base, non vorremmo lasciare il lettore con l'impressione che le leggi di scala siano tutte così semplici o che siano applicabili solo in campo biologico (come abbiamo fatto in questa nota); tali leggi, in realtà, trovano vasta applicazione anche in fisica, fluidodinamica, ingegneria ecc. Il punto cruciale consiste nel fatto che un sistema sottoposto a determinate leggi (newtoniane), se ridimensionato, cambia il suo comportamento, pur continuando ad ubbidire alle stesse leggi (la supermucca non può esistere pur dipendendo dagli stessi meccanismi biologici e fisici di una mucca normale). Gli studi dei cambiamenti legati alle variazioni di scala risultano dunque particolarmente importanti nel campo delle nanotecnologie dove sistemi progettati "in grande" non funzionano se ridotti senza seguire opportune leggi di scala che possono essere molto più complesse di quelle qui mostrate.

Nel livello avanzato diamo diversi esempi di leggi di scala anche al di fuori del mondo animale e, in alcuni casi, lievemente più complesse.

In questo livello avanzato diamo alcuni (tra i molti) esempi di applicazione delle leggi di scala

Il teorema di Pitagora

La dimostrazione del teorema di Pitagora tramite la legge di scala rappresenta un'intrigante applicazione di questo metodo. Consideriamo (Fig. 5) i tre triangoli $\Delta_1 = ABC$, $\Delta_2 = ACD$ e $\Delta_3 = BCD$, con il lato CD ortogonale ad AB. Si può facilmente verificare che questi triangoli sono simili.[5] Sappiamo poi che l'area A è proporzionale al quadrato di una lunghezza caratteristica, p.e. l'ipotenusa; abbiamo quindi $A_1 = \lambda \overline{AB}^2$, $A_2 = \lambda \overline{AC}^2$ e $A_3 = \lambda \overline{BC}^2$ (la costante di proporzionalità λ è la stessa per i tre triangoli perché sono simili). Ovviamente vale $A_1 = A_2 + A_3$, da cui si ottiene $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, ossia il teorema di Pitagora.

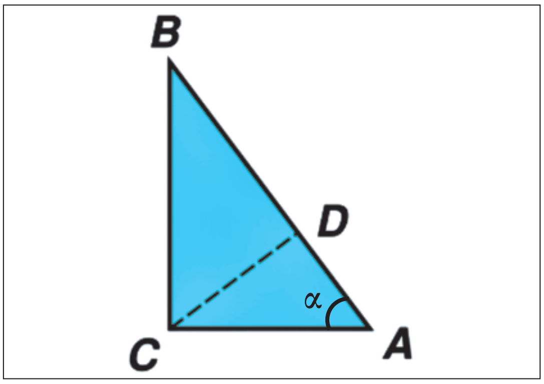

Fig. 5. Il teorema di Pitagora dimostrato secondo una legge di scala (si veda il testo).

Galileo (statica)

La Fig. 6a mostra in maniera schematica un recipiente sferico per lo stoccaggio dell'acqua posto in cima ad una colonna cilindrica. Immaginiamo ora di voler ingrandire la struttura in modo isometrico, in modo, cioè, che i rapporti tra le varie lunghezze lineari[6] (h/D, d/D) rimangano invariati; in questo modo la struttura ingrandita risulta simile all'originale (come nel caso della supermucca di Fig. 2a). La pressione della massa d'acqua M esercitata sulla superficie S della colonna è dunque $p \propto M/S \propto D^3/d^2 \propto D^3/D^2$, e dunque $p \propto D$. Si capisce, quindi, che esiste un limite alle dimensioni del contenitore oltre il quale la pressione supera il valore critico p_c che la colonna può sopportare e la struttura crolla. Per passare a dimensioni ancora maggiori è dunque necessario seguire un'altra strada. Consideriamo una struttura "al limite", nel senso che la pressione sia già p_c. Abbiamo allora $p_c \propto D^3/d^2$ da cui $d^2 \propto D^3/p_c \propto D^3$, ossia $d \propto D^{3/2}$. In una struttura più grande D e h possono crescere linearmente; se, p.e., $D' = 2D$, anche $h' = 2h$, ma $d' \propto D'^{3/2}$, ossia $d' = 2^{3/2} d$ (le variabili con apice si riferiscono alla struttura ingrandita). Pertanto, perché strutture più grandi restino stabili è necessario che la colonna sia più massiccia con un diametro che aumenta, in proporzione, più di quanto aumenti la sua altezza. Questo tipo di ingrandimento è detto allometrico[7] *in quanto devia dall'isometria (Fig. 6b).*

Se assimiliamo le ossa che sostengono un animale alla torre che regge il recipiente dell'acqua capiamo perché non esistono supermucche isometriche (Fig. 2a) e perché gli animali più grandi hanno ossa più tozze, come dimostrato e illustrato da Galileo (Fig. 2c).

[5] Consideriamo, p.e., i due triangoli Δ_1 e Δ_2. Hanno l'angolo α in comune e sono entrambi triangoli rettangoli; di conseguenza hanno i tre angoli uguali e dunque sono simili.

[6] I simboli di queste lunghezze sono mutuati dalla Fig. 6a.

[7] Il ridimensionamento può essere descritto dall'equazione $y = ax^b$, dove a rappresenta il coefficiente di proporzionalità. Se $b = 1$ il ridimensionamento è isometrico, altrimenti è allometrico (come nel caso del diametro della colonna). Tutte le relazioni mostrate e numerate nel livello base sono allometriche.

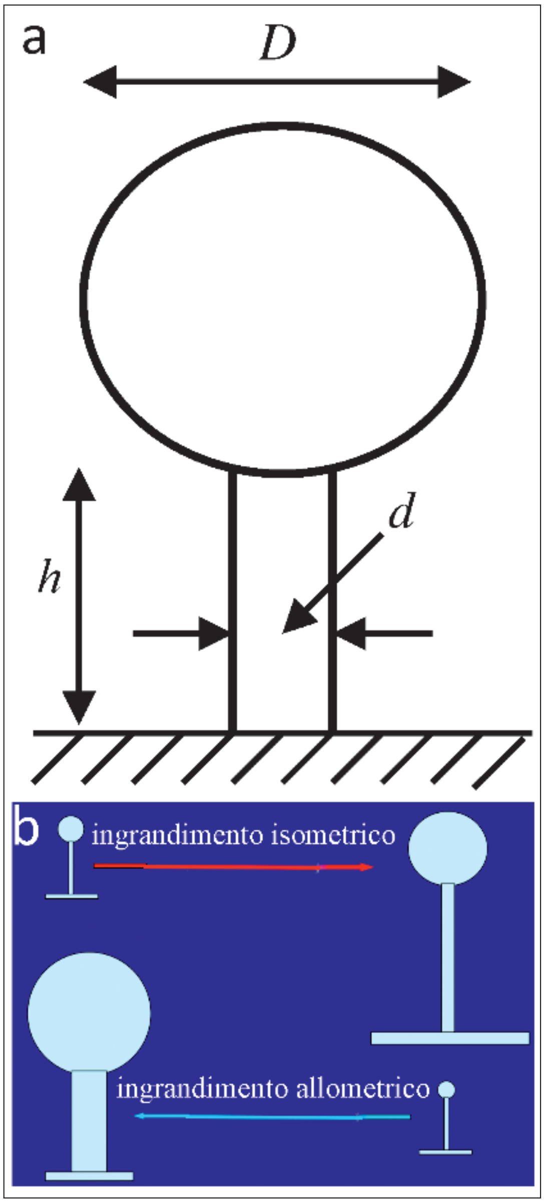

FIG. 6. **a**) Rappresentazione schematica di una "torre d'acqua" con un recipiente sferico contenente acqua sostenuto da una colonna cilindrica. **b**) Ingrandimento isometrico, in cui tutte le dimensioni lineari (h, d, D) mantengono le relative proporzioni e la struttura ingrandita è simile all'originale, e ingrandimento allometrico, in cui lo spessore della colonna aumenta in maniera sproporzionata.

Le Cefeidi

Esiste una famiglia di stelle dette Cefeidi la cui luminosità varia con un periodo Π molto preciso, dell'ordine di 1-100 giorni: maggiore è la luminosità della stella, maggiore è il suo periodo (si vedano le Spigolature *nel n. 4 del 2010). La variabilità è dovuta ad una pulsazione della stella, ossia una oscillazione del raggio nel tempo (*FIG. 7*). Arthur Eddington (1882-1944) dimostrò che Π è legato alla densità media stellare ϱ tramite la relazione di scala $\Pi \propto \varrho^{-1/2}$. Il meccanismo della pulsazione è alquanto complesso, tuttavia l'andamento qualitativo tra periodo e densità può essere ottenuto, senza alcuna pretesa di rigore, tramite un'analogia con il*

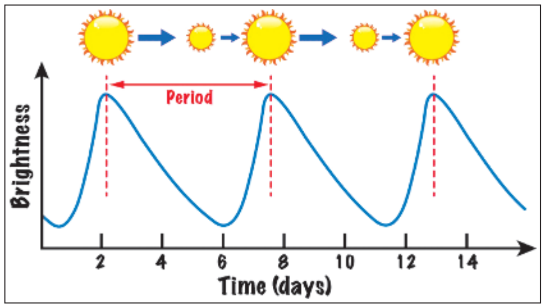

FIG. 7. Andamento periodico della luminosità di una Cefeide dovuto ad un'altrettanto periodica pulsazione della stella.

più classico dei fenomeni periodici, ossia il pendolo. Come riportato in ogni manuale di fisica, il periodo di oscillazione del pendolo è $\Pi = 2\pi\,(g/l)^{-1/2}$, dove g è l'accelerazione di gravità e l la lunghezza del pendolo. Se ad oscillare è una stella di massa M e raggio R, possiamo porre $l \sim R$ e $g \sim GM/R^2$, dove G è la costante di gravità; posto $M \propto \varrho\, R^3$ otteniamo $g \propto \varrho\, R$ e infine $\Pi \propto \varrho^{-1/2}$.

Stampanti e polpette

Nel linguaggio comune (che noi pure abbiamo adottato nel livello base) per calore di un oggetto si intende quello che i fisici in realtà chiamano energia termica U. Consideriamo un recipiente chiuso di dimensioni lineari l e superficie S contenente un fluido (o una massa) a temperatura T. Il calore Q è definito come il trasporto o flusso di U attraverso le pareti del recipiente nell'unità di tempo. Questo flusso è dovuto alla differenza di temperatura ΔT tra il fluido e l'ambiente esterno al recipiente: $Q = \varkappa S \Delta T$, dove $\varkappa$ è il coefficiente di trasporto termico. A causa del flusso, in un tempo Δt l'energia interna varia di una quantità $\Delta U = cM\Delta T$, dove c è il calore specifico e M è la massa del fluido. Possiamo allora scrivere $Q = \Delta U/\Delta t$. Riordinando le formule si ottiene $\Delta t = \Delta U/Q = cM/\varkappa S$. c e $\varkappa$ sono costanti che non dipendono dalle dimensioni lineari l del recipiente. Come al solito abbiamo $S \propto l^2$ e $M \propto l^3$, pertanto otteniamo $\Delta t \propto l$. Dunque, se l'acqua impiega 10 minuti per bollire in un recipiente dalle dimensioni lineari l = 20 cm, essa bollirà in 60 ms in una cavità con l = 20 micron ($1\mu = 10^{-4}$ cm). Su questo si basa il funzionamento delle stampanti a getto d'inchiostro: in una frazione di secondo l'inchiostro viene vaporizzato espandendosi e formando una gocciolina che viene espulsa dalla cartuccia attraverso un foro.

Un altro esempio di legge di scala riguardante il calore e tratto dalla quotidianità è dato, p.e., dalla cottura dei cibi. Supponiamo di voler cucinare delle polpette di raggio r. La relazione tra la loro superficie e la loro massa è $S \propto M^{2/3}$ [eq. (1)]; questo significa che le polpette più piccole riducono la loro superficie in maniera inferiore alla carne che racchiudono. Dal momento che il flusso termico Q è

Fig. 8. L'invasione delle formiche giganti.

proporzionale alla superficie (se S raddoppia, anche Q raddoppia), le polpette piccole cuociono prima e più uniformemente perché, proporzionalmente, contengono meno carne da cucinare rispetto al calore che ricevono.

La pulce e l'elefante

Sappiamo che la forza di un muscolo è circa proporzionale alla superficie della sua sezione trasversa, a sua volta proporzionale alla superficie dell'animale. Pertanto possiamo interpretare S/M come un indice del rapporto tra la forza e il peso dell'animale stesso. Consideriamo ora una pulce e un elefante. Assumiamo, a titolo di esempio, che quest'ultimo abbia $M_e = 6000$ kg e la pulce $M_p = 0{,}75$ mg. L'elefante è ovviamente molto più forte della pulce ma non è in grado di saltare mentre la pulce raggiunge altezze pari a circa cento volte la sua dimensione lineare. Queste diverse capacità si spiegano facilmente (in prima approssimazione) con la legge di scala data dall'eq. (2):

$$\left(\frac{S_p}{M_p}\right)\Big/\left(\frac{S_e}{M_e}\right)\sim\left(\frac{M_e}{M_p}\right)^{\frac{1}{3}}\sim 2000, \qquad (5)$$

dove S_p e S_e sono, rispettivamente, la superficie della pulce e dell'elefante. Quindi, la pulce è circa 2000 volte più forte dell'elefante relativamente al proprio peso, e questo le permette le sue "performance".

Le formiche giganti

Concludiamo questa carrellata di semplici esempi di leggi di scala discutendo un altro insetto dalla straordinaria capacità di trasportare pesi pari a 50 volte il proprio: la formica. Dimensioni e peso sono variabili (a seconda della specie); per fissare le idee assumiamo $l = 5$ mm e $M = 5$ mg. Negli anni Cinquanta del secolo scorso vennero realizzati numerosi B movie horror/fantascientifici in cui la Terra veniva invasa da esseri terrificanti, tra cui formiche giganti (con dimensione lineare, diciamo, $l_g = 2000$ mm e massa M_g) in grado di fare strage di terrestri per via della loro forza fenomenale (Fig. 8). Tuttavia, se i terrestri (e specialmente gli sceneggiatori) avessero letto Galileo avrebbero saputo che non c'è nulla da temere dalle formiche giganti per svariati motivi: 1) anche se le formiche hanno un esoscheletro (contrariamente ai mammiferi) la resistenza delle zampe non crescerebbe in ragione della massa corporea e la formica gigante crollerebbe sotto il suo stesso peso; 2) al solito, per la superficie e la massa della formica abbiamo $S \propto l^2$ e $M \propto l^3$ e conseguentemente $S/M \propto l^{-1}$. Analogamente all'eq. (5) scriviamo

$$\left(\frac{S_g}{M_g}\right)\Big/\left(\frac{S}{M}\right)\sim\frac{l}{l_g}=\frac{5}{2000}=0{,}0025,$$

dove S e S_g sono, rispettivamente, la superficie della formica normale e di quella gigante. Pertanto, il rapporto forza/peso diminuirebbe di un fattore 0,0025 e la formica non riuscirebbe a muoversi; 3) la pressione della massa corporea esercitata contro l'esoscheletro che avvolge il corpo è proporzionale a $M/S \propto l$. Dunque in una formica gigante la pressione diventerebbe eccessiva e l'esoscheletro cederebbe; 4) le formiche non hanno polmoni e si riforniscono d'aria tramite 10 paia di spiracli, aperture distribuite lungo i fianchi del corpo. Una formica gigante acquisisce dunque maggiore ossigeno proporzionalmente alla sua superficie. Ma la sua massa – come ormai sappiamo – cresce maggiormente e l'ossigeno che riceve non è sufficiente. Pertanto la formica gigante è destinata a morire soffocata.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.