Spigolature astronomiche*

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna

Quanto è grande l'infinito?

Annibale D'Ercole

Immaginiamo un pastore analfabeta che accompagni ogni giorno al pascolo le sue pecore e che poi le rinchiuda nell'ovile al calare della sera. Per sincerarsi di non averne persa alcuna durante il giorno, agisce come segue: al mattino egli deposita in terra un sasso per ogni pecora che, uscendo, passa davanti a lui; alla sera, toglie un sasso dal mucchio formato al mattino ogni volta che una pecora varca l'entrata dell'ovile. Se il prelievo dell'ultimo sasso avviene in corrispondenza del rientro dell'ultimo animale, il nostro pastore, pur non sapendo contare, capisce di non aver perso alcuna pecora.[1]

Per comprendere cosa abbiano a che fare il pastore e le sue pecore con l'argomento di questa nota – ovvero, l'infinito – dobbiamo considerare, sia pure assai brevemente, come si sia evoluto nel tempo tale concetto. Per lungo tempo l'infinito è stato considerato dai matematici una sorta di tabù da evitare. Una simile attitudine risale ad Aristotele, le cui opinioni, per oltre due millenni, hanno dominato la cultura occidentale. Aristotele distingueva tra infinito *potenziale* e infinito *attuale*. Secondo questa classificazione, la sequenza di tutti i numeri *naturali* (i numeri interi positivi) rappresenta un infinito potenziale perché non esiste un numero finale più grande di tutti, in quanto è sempre possibile aggiungere a quest'ultimo un'unità per ottenere un numero maggiore; pertanto l'intera lista di numeri naturali non esiste in realtà come qualcosa di completo e "maneggiabile" concretamente in matematica. L'unica accezione possibile di infinito era dunque, per Aristotele, quella di infinito potenziale, perché l'infinito attuale non è realizzabile né in matematica né, tantomeno, in natura.

Nel XVIII secolo il dettato aristotelico sull'infinito attuale era ancora largamente condiviso. Ad esempio, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), comunemente ritenuto il massimo matematico esistito, ancora nel 1831 in una lettera ad un collega scriveva: «Io devo protestare veementemente contro l'uso dell'infinito come qualcosa di definito: questo non è permesso in matematica. L'infinito è solo un modo di dire, ed intende un limite cui certi rapporti possono approssimarsi vicino quanto vogliono, crescendo indefinitamente». Ma pochi decenni dopo, l'infinito attuale doveva irrompere finalmente in matematica grazie al matematico tedesco (ma nato in Russia) Georg Cantor (1845-1918).

L'idea di base di Cantor era stata già anticipata, per certi versi, due secoli prima da Galileo, che però non ne vide le potenzialità. La lista di tutti i numeri naturali 1, 2, 3, 4, … contiene evidentemente infiniti elementi. Naturalmente, anche la lista dei soli numeri pari è infinita, ma siamo tuttavia portati a pensare che contenga solo "la metà" di tutti i numeri naturali. Questo è certamente vero per liste finite (che arrivano, cioè, fino ad un numero massimo, ad esempio 100). Ma se le liste diventano infinite le cose cambiano. Per quanto accennato più sopra riguardo all'infinito attuale, noi non sappiamo contare in maniera "definitiva" l'ammontare degli elementi contenuti nei due insiemi infiniti dei naturali e dei pari, e siamo dunque, a ben vedere, in una condizione simile a quella del pastore analfabeta che abbiamo descritto all'inizio. Possiamo allora provare ad adottare una tecnica simile alla sua per

* Questa rubrica si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», www.bo.astro.it/sait/giornale.html.

[1] I numeri sono un'invenzione (per alcuni, una scoperta) dell'uomo. Inizialmente, per contare, si utilizzarono sassi, tacche su ossi, cordicelle annodate. La parola "calcolo" deriva dal latino *calculus*, ovvero "sassolino". Col tempo i sassi sono stati sostituiti da manufatti; in Africa e in Oriente sono stati ritrovati oggetti in terra cruda di forma e grandezza diverse (coni, sfere dischi, bastoncelli, cilindri), a simboleggiare valori diversi. Ossi intagliati, vecchi di 20.000-30.000 anni, sono stati ritrovati principalmente in Europa occidentale. La numerazione tramite cordicelle si rinviene in epoche e località diverse (Grecia e Persia del I millennio a.C., Palestina del II secolo d.C., Cina e Sud America). Ancora oggi è usata dagli indigeni dell'Ecuador e del Perù.

1	⇔	2
2	⇔	4
3	⇔	6
4	⇔	8
5	⇔	10
6	⇔	12
…	⇔	…

Fig. 1. Il *paradosso di Galileo*. Si consideri la lista infinita di numeri naturali (colonna a sinistra). Ad ognuno di essi è possibile associare il suo doppio (colonna a destra). Si ottiene così una corrispondenza biunivoca tra tutti i numeri naturali e i soli numeri pari.

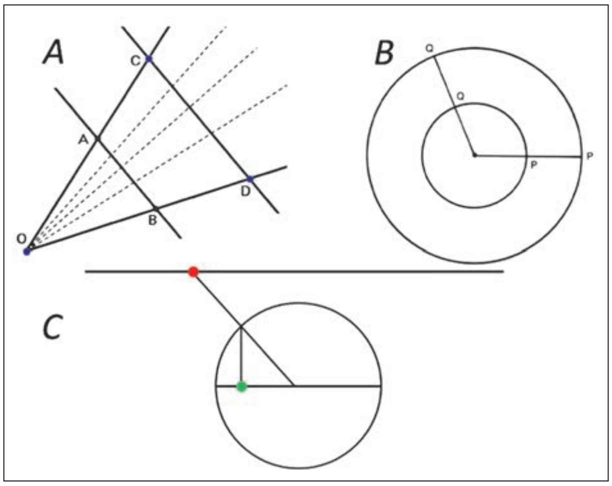

Fig. 2. Tre esempi di apparenti paradossi legati al concetto di infinito. In A) si mostra come gli infiniti punti del segmento AB siano "tanti quanti" i punti del segmento CD, nonostante quest'ultimo sia di lunghezza maggiore; infatti, tramite un fascio di semirette originate in O (tratteggiate in figura) è possibile mettere in corrispondenza biunivoca i punti dei due segmenti: a ciascun punto di uno corrisponde un solo punto dell'altro, e viceversa. I due cerchi concentrici in B) hanno lo stesso numero di infiniti punti, nonostante che quello interno sia più piccolo: è infatti possibile mettere in corrispondenza biunivoca i punti delle due circonferenze tramite i raggi della circonferenza più esterna. Un paradosso ancora più eclatante è rappresentato in C) dalla costruzione geometrica che permette una corrispondenza biunivoca tra i punti (rossi) della retta e quelli (verdi) del segmento dato dal diametro del cerchio; infatti, allo scorrere del punto rosso lungo la retta, il punto verde scorre lungo il segmento in modo tale da far corrispondere ciascun singolo punto di quest'ultimo ad un solo punto della retta e viceversa. Questo porta alla conclusione che l'insieme dei punti del segmento (di lunghezza finita) e della retta (infinita), siano "ugualmente numerosi".

confrontare i due insiemi. Nella Fig. 1 i numeri naturali sono stati disposti lungo una colonna infinita; moltiplicando poi per 2 ciascun numero naturale si ottiene una seconda colonna composta da tutti e soli i numeri pari, ognuno dei quali è associato ad uno e solo numero naturale, e viceversa: diciamo che gli elementi dei due insiemi sono in *corrispondenza biunivoca*, proprio come nel caso del mucchio di sassi e del gregge di pecore del nostro pastore. Dobbiamo dunque concludere che i due insiemi infiniti contengono la stessa quantità di elementi, e che dunque i numeri pari, pur essendo solo una parte di tutti i numeri naturali (pari e dispari), sono tanti quanti quest'ultimi, in evidente contrasto con l'assunto euclideo (palesemente valido per insiemi finiti) in base al quale «il tutto è maggiore di una sua qualsiasi parte». Questo fatto era noto a Galileo (in verità egli considerò l'insieme dei quadrati 1, 4, 9, 16, …, invece che dei pari), ed è chiamato per questo il *paradosso di Galileo*.

Lo scienziato pisano concluse che i concetti di *minore*, *maggiore* ed *uguale* si possono applicare solo ad insiemi finiti, ma non a quelli infiniti. Nel xix secolo, invece, Cantor mostrò che questa restrizione non è necessaria. È possibile paragonare insiemi infiniti e determinare se sono uguali o se uno è maggiore dell'altro. Al di là del paradosso di Galileo, la Fig. 2 illustra alcuni esempi di tipo geometrico in cui si mostra, tramite il metodo della corrispondenza biunivoca, come segmenti di lunghezza diversa contengano lo stesso numero (infinito) di punti, pari anche a quelli di una retta infinita. Cantor ha anche dimostrato che tali punti sono pari a quelli di tutto lo spazio tridimensionale. Non esponiamo qui quest'ultima dimostrazione, ma riportiamo il paradosso di Alberto di Sassonia (1316-1390), un vescovo tedesco vissuto nel xiv secolo, che in qualche modo anticipò il risultato di Cantor. Come si vede in Fig. 3, è concettualmente possibile suddividere un'asta infinitamente lunga in un numero infinito di segmenti che, riordinati in maniera opportuna, vanno a riempire tutto lo spazio, anche quello inizialmente vuoto; vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'asta iniziale e quelli di tutto lo spazio.

Al contrario di Galileo, Cantor "ebbe l'ardire" di spingere fino alle estreme conseguenze i risultati derivanti dall'applicazione del metodo della corrispondenza biunivoca e, come abbiamo visto negli esempi illustrati nelle Figg. 1, 2 e 3 (ed altri analoghi), demolì il tabù aristotelico rendendo attuale l'infinito; egli riuscì infatti a trattarlo al pari di altre grandezze matematiche, confrontando tra loro infiniti diversi e dimostrando, contrariamente a quanto ritenuto da Galileo, la loro uguaglianza. Si può però obiettare che la precedente osservazione non è poi così sorprendente: tutti gli insiemi infiniti, appunto perché tali, hanno lo stesso numero (infinito) di elementi. Ma Cantor andò oltre, e dimostrò che esistono infiniti "più grandi" di altri; ad esempio, l'insieme di punti che formano una retta costituisce un infinito "più grande" dell'insieme di tutti i numeri naturali. Infatti, i punti sulla retta che rappresentano gli interi sono distanziati da segmenti (per esempio, tra 0 e 1, tra 1 e 2, ecc.) che contengono ciascuno infiniti punti. Intuitivamente, dunque, tutti questi punti risultano "più numerosi" dei soli punti associati agli interi; benché abbiamo imparato a diffidare dell'intuizione quando si parla di infinito, Cantor ha dimostrato che in questo caso la nostra sensazione è corretta (si veda il livello avanzato).

Più in generale, Cantor dimostrò che, contrariamente a quanto ritenuto fino ad allora, non esiste un unico infinito oltre il quale non si può andare, ma esistono invece infiniti più piccoli (il minore è dato dall'insieme dei numeri naturali) ed infiniti sempre più grandi, secondo una gerarchia senza fine (si veda il livello avanzato).

Le scoperte di Cantor ebbero un'accoglienza contrastata, ma tendenzialmente negativa. Effettivamente, David Hilbert (1862-1943), uno dei più autorevoli matematici del XX secolo, commentò entusiasticamente che «nessuno ci porterà via dal paradiso che Cantor ha creato per noi». D'altra parte, Leopold Kronecker (1823-1891), un influente matematico dell'Università di Berlino, si oppose alla pubblicazione dei lavori di Cantor, appellando quest'ultimo quale «corruttore dei giovani» e «ciarlatano scientifico» e sostenendo che «non è possibile dire se nella teoria di Cantor predomini la filosofia o la teologia, ma certamente la matematica vi è del tutto assente». Il grande matematico francese Henri Poincaré (1854-1912) scrisse che «le future generazioni guarderanno [al lavoro di Cantor] come una malattia da cui guarire» e il filosofo Ludwig Wittgenstein (1989-1951) bollò la teoria di Cantor come un «assoluto nonsense» e «risibile».

Del resto lo stesso Cantor, riferendosi ai suoi risultati, in una lettera al matematico tedesco Richard Dedekind (1831-1916) scrisse stupefatto: «lo vedo, ma non ci credo». Dunque, il concetto di infinito rappresentava ancora un campo minato, con implicazioni anche teologiche. Com'è infatti possibile conciliare l'assenza di un infinito più grande di tutti (come propugnato da Cantor) con il concetto di Dio come infinito assoluto ed onnicomprensivo? Un'analoga obiezione era già stata rivolta a Giordano Bruno (1548-1600), un filosofo italiano e frate domenicano, messo al rogo dall'Inquisizione (anche) perché sosteneva l'infinità dell'universo, mentre per la Chiesa cattolica solo Dio possiede tale qualità.

Ma il tempo alla fine ha dato ragione a Cantor ed oggi l'infinito viene considerato un normale "ingrediente" non solo della matematica, ma anche della natura. In elettrodinamica quantistica, ad esempio, ci si imbatte in termini infiniti quando si considera l'interazione di un elettrone con il campo elettrico da lui stesso generato e a cui è inestricabilmente legato; dal momento che l'intensità di tale campo varia come l'inverso del quadrato della distanza, esso risulta infinito attorno all'elettrone stesso, considerato puntiforme. I fisici hanno messo a punto tecniche matematiche per la rimozione di questi infiniti (dette "rinormalizzazione"), grazie alle quali la meccanica quantistica è stata definita "il gioiello della fisica" per le previsioni estremamente accurate che è in grado di fare. L'infinito è anche trattato in cosmologia; dalla teoria della relatività generale sappiamo che le proprietà geometriche dello spazio dipendono dall'ammontare di materia in esso contenuta; una quantità elevata richiude lo spazio su se stesso, limitandone il volume (l'analogo bidimensionale è dato dalla superficie di una sfera, che è finita). Le osservazioni, tuttavia, indicano una densità di materia (ed energia) nell'universo tale da dare luogo ad uno spazio piatto infinito (l'analogo bidimensionale è dato dalla superficie di un tavolo infinitamente esteso).

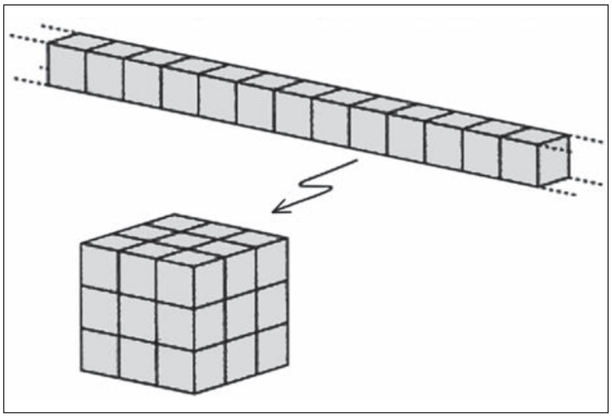

Fig. 3. Il *paradosso di Alberto di Sassonia*. Si consideri un'asta di legno a sezione quadrata infinitamente estesa. È concettualmente possibile suddividerla in un numero infinito di cubetti che, assemblati diversamente, riempiano tutto lo spazio, anche quello inizialmente vuoto.

Se gli scienziati odierni possono trattare l'infinito senza "timori reverenziali", gran parte del merito va attribuito alla "follia visionaria" di personaggi quali Giordano Bruno e Georg Cantor. In quest'ultimo caso il termine "follia" ha una valenza non solo figurata. Durante la seconda parte della sua vita, infatti, Cantor soffrì di attacchi di depressione, e morì ad Halle dove era ricoverato in un ospedale psichiatrico.

Il numero di elementi di un insieme è detto cardinalità, o potenza, dell'insieme. Ad esempio, la cardinalità dell'insieme delle dita della mano destra è pari a 5. Possiamo poi far combaciare il palmo della mano destra con quello della mano sinistra, mettendo a contatto il pollice destro con quello sinistro, l'indice destro con quello sinistro ecc., in modo che ad ogni dito della mano destra corrisponda un unico dito della mano sinistra e viceversa. Dal punto di vista matematico, diciamo allora che abbiamo operato una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle dita della mano destra e quello delle dita della mano sinistra e pertanto quest'ultimo ha la stessa cardinalità del primo, ovvero le due mani

1	1
2	-1
3	2
4	-2
5	3
6	-3
...	...

Fig. 4. *La figura mostra come sia possibile porre in corrispondenza biunivoca gli elementi della colonna a sinistra (i numeri naturali) con quelli della colonna di destra (i numeri interi positivi e negativi). I due insiemi hanno dunque la stessa cardinalità.*

1/1	1/2 →	1/3	1/4 →	1/5	1/6 →	1/7	1/8 →	⋯
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Fig. 5. *Tabella infinita contenente tutti i numeri razionali in forma di frazione. Se volessimo percorrere tutta la tabella partendo da 1/1 e muovendoci verso destra, non giungeremmo mai alla seconda riga, perché la prima (come tutte le altre) è infinita. Se invece seguiamo il percorso segnato dalle frecce, siamo in grado (in linea di principio) di raggiungere ogni elemento della tabella ed associare ad esso un numero naturale progressivo. Nella tabella alcuni numeri si ripetono: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, ecc. sono tutti pari ad 1. Inoltre 4/2, 8/4, 16/8, ad esempio, valgono tutti 2. I numeri ripetuti sono colorati in rosso e possono essere trascurati.*

hanno lo stesso numero di dita. Questo procedimento può apparire alquanto farraginoso, giacché risulta senz'altro più semplice limitarsi a contare le dita per verificarne il numero. Tuttavia, nel caso di insiemi infiniti il conteggio non è possibile, mentre il metodo della corrispondenza biunivoca è ancora realizzabile. Di conseguenza, se è possibile mettere in corrispondenza biunivoca due insiemi X e Y, anche se infiniti, diciamo che essi hanno la stessa cardinalità, ovvero $|X| = |Y|$, dove $|X|$ e $|Y|$ indicano la cardinalità dei due insiemi; se invece questa procedura "lascia fuori" degli elementi di Y che non trovano alcun corrispettivo tra gli elementi di X, diciamo che Y è più grande di X o, più precisamente, che Y ha una cardinalità maggiore di X, cioè $|Y| > |X|$.

Consideriamo l'insieme dei numeri interi, sia positivi che negativi. Saremmo portati a pensare che esso sia grande "il doppio" (qualunque cosa questo significhi nel caso di insiemi infiniti) rispetto all'insieme dei naturali, composto dai soli interi positivi. Noi non sappiamo contare in maniera "definitiva" l'ammontare degli elementi contenuti in questi insiemi infiniti, ma possiamo provare a metterli in corrispondenza biunivoca. Nella Fig. 4 *i numeri naturali e quelli interi sono stati disposti lungo due colonne infinitamente estese in modo che ogni elemento di una sia associato ad un solo elemento dell'altra e viceversa. Pertanto, contrariamente a quanto suggerito dalla nostra intuizione, i numeri interi sono "tanti quanti" i naturali, ovvero possiedono la stessa cardinalità. La cardinalità dei numeri naturali è detta "numerabile" ed è stata "battezzata" da Cantor $\aleph_0$ (aleph con zero, dove aleph è la prima lettera dell'alfabeto ebraico).*

Passiamo ora a considerare i numeri razionali (esprimibili come rapporto tra interi) che sembrerebbero più numerosi dei numeri naturali. Esistono degli ovvi "buchi" nella lista dei numeri naturali: tra 1 e 2, ad esempio, non troviamo altri numeri naturali. Ma è sempre possibile trovare un numero razionale in mezzo ad altri due, non importa quanto questi ultimi siano vicini tra loro. Tra 1/3 e 1/2 c'è 5/12; tra 5/12 e 1/2 c'è 11/24, e così via. Insomma, è sempre possibile sommare due numeri razionali tra loro e dividere la somma per 2, ottenendo un nuovo numero razionale compreso tra i due. Questo significa che, ad esempio, esistono infiniti numeri razionali tra 1 e 2. Nonostante questo, Cantor ha dimostrato che i naturali sono "tanti quanti" i razionali, ovvero che i due insiemi di numeri hanno la stessa cardinalità $\aleph_0$. Immaginiamo di disporre i numeri razionali secondo la tabella illustrata in Fig. 5. *Partendo dall'angolo in alto a sinistra, dove c'è 1/1, muovendoci verso destra incontriamo tutti elementi in cui aumenta il denominatore; se invece ci spostiamo verso il basso lungo una colonna, è il numeratore ad aumentare progressivamente. Per "contare" tutti gli elementi della tabella, dobbiamo muoverci attraverso di essa assegnando un numero naturale progressivo ad ogni numero razionale che incontriamo. Se provassimo a viaggiare lungo ciascuna riga, una dopo l'altra, non riusciremmo mai a raggiungere la seconda, giacché la prima è infinita. Se però ci spostiamo lungo le diagonali, possiamo ottenere il risultato cercato. Assegniamo 1 a 1/1, 2 a 2/1, 3 a 1/2, 4 a 1/3, e così via. Dal momento che ogni diagonale possiede un solo elemento in più rispetto alla precedente, ciascuna diagonale è finita ed è possibile assegnare* *un numero naturale ad ogni singolo elemento che si incontra lungo il percorso. Abbiamo così creato una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e quelli razionali, dimostrando che hanno la stessa cardinalità* $\aleph_0$.

È opinione comune (e lo fu per lungo tempo anche tra gli "addetti ai lavori") che non vi possa essere nulla di più grande dell'infinito e sembrerebbe dunque privo di senso prendere in esame infiniti con cardinalità maggiore di $\aleph_0$. *Cantor ha invece dimostrato che questi infiniti esistono. Si consideri, ad esempio, l'insieme dei numeri reali, che sono tutti quei numeri che possono essere espressi in notazione decimale tramite una sequenza finita di cifre prima della virgola, e una sequenza finita o infinita di cifre dopo la virgola:* 34,567 e 0,3298457 … *sono due esempi di numeri reali. I numeri razionali sono reali perché le frazioni possono essere espresse tramite una sequenza finita o infinitamente ripetitiva di cifre decimali. Ma ci sono altri numeri reali che non sono razionali, come ad esempio* $\sqrt{2}$ *o* π. *Questi numeri si esprimono unicamente tramite una sequenza infinita di cifre decimali che non mostra alcuna ciclicità. Al pari dei numeri razionali, i reali sono densamente aggregati: dati due reali, anche vicinissimi, è sempre possibile trovarne un terzo compreso tra i primi due. Dunque, anche in questo caso possiamo dire che vi sono infiniti reali tra* 1 *e* 2. *Pertanto, in analogia con quanto abbiamo visto per i razionali, saremmo portati a credere che, a seguito di qualche astuto algoritmo di conteggio, sia possibile porre in corrispondenza biunivoca i numeri naturali e quelli reali, assegnando anche a questi ultimi la cardinalità* $\aleph_0$. *Ma Cantor ha dimostrato che le cose stanno diversamente.*

Proviamo a porre in corrispondenza biunivoca i numeri naturali e i numeri reali compresi tra 0 *e* 1, *disponendoli in due colonne infinitamente estese, come mostrato in* Fig. 6. *Si consideri ora la prima cifra decimale del primo numero reale, la seconda del secondo numero, la terza del terzo e così via (queste cifre sono indicate in rosso nella tabella). Con queste cifre è possibile comporre un numero reale, indicato in rosso nella* Fig. 6. *Cambiamo poi in maniera arbitraria le cifre di questo numero: nell'esempio illustrato in* Fig. 6 *il* 2 *è stato sostituito dal* 7, *il* 9 *dal* 4 *ecc. Questo nuovo numero, composto da una sequenza infinita di cifre decimali, è anch'esso reale, ma non è compreso nella lista infinita (la seconda colonna) da cui siamo partiti. Esso non può trovarsi al primo posto della lista, perché (almeno) la sua prima cifra decimale è diversa da quella del primo numero reale, ma non può trovarsi neppure al secondo posto perché la seconda cifra è diversa, né al terzo perché la terza cifra è diversa, e cosi via. Dunque, il numero non appartiene alla lista di "tutti" i reali da cui siamo partiti, e pertanto non è possibile porre una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e quello dei reali, perché tra questi ultimi ve ne sarà sempre "qualcuno in più". Detta* **c** *la cardinalità dei reali, vale dunque la relazione* $\mathbf{c} > \aleph_0$. *Si può dimostrare (con procedimenti meno banali di quanto si potrebbe essere portati a credere) che i numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta; dal momento che una delle proprietà fondamentali di quest'ultima è, parlando a livello intuitivo, la sua "continuità",* **c** *viene anche detta la cardinalità del continuo.*

0	0.**2**36436775676...
1	0.0**9**8473294543...
2	0.19**3**214042202...
3	0.843**2**79242093...
4	0.0129**3**4812343...
5	0.63942**3**412934...
6	0.017773**9**23845...
7	0.2389200**9**0909...
8	0.12398473**2**999...
9	0.646329878**1**22...
10	0.0001239434**3**7...
11	0.98129831289**2**...
⋮	⋮
	0.**293233992132...**
	0.746894310875...

Fig. 6. *Tabella "infinita" a due colonne. La prima rappresenta la lista di tutti i numeri naturali, e la seconda è composta da numeri reali. Il numero reale indicato in rosso posto sotto la linea orizzontale è costruito utilizzando le cifre decimali rosse dei reali elencati nella tabella. Il numero reale in nero posto sotto la linea orizzontale è ottenuto da quello rosso variandone arbitrariamente le cifre decimali (si veda il testo per ulteriori dettagli).*

Una volta chiarito che effettivamente esistono infiniti "di diversa grandezza", Cantor dimostrò che in realtà è possibile costruire insiemi infiniti di cardinalità sempre maggiore tramite un procedimento iterativo. Si consideri un insieme $S = \{A, B, C\}$ *composto dai tre elementi A, B e C; esso ha quindi cardinalità* $|S| = 3$. *Vi sono* 8 *possibili sottoinsiemi di tale insieme:* $\{A, B, C\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$, $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ *e* $\{\}$ *(si noti come l'intero insieme, ed anche l'insieme vuoto* $\{\}$, *siano conteggiati tra i possibili sottoinsiemi dell'insieme originario). È possibile allora definire un nuovo insieme S', composto dalla totalità dei sottoinsiemi di S, la cui cardinalità è dunque* $|S'| = 2^{|S|} = 8$. *Procedendo su questa linea, possiamo costruire un insieme successivo di potenza* $|S''| = 2^{|S'|}$ *e cosi via. Seguendo un ragionamento non dissimile da quello adottato per valutare la cardinalità dell'insieme dei numeri reali, Cantor ha mostrato che il risultato ottenuto rimane valido anche per insiemi infini-*

ti. A partire dall'insieme dei numeri naturali (la cui cardinalità $\aleph_0$ è la più piccola), è possibile costruire un infinito di cardinalità maggiore, pari a $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, e, più in generale, $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. In conclusione, Cantor mostrò che, così come esistono numeri maggiori o minori di altri, analogamente esistono infiniti "più grandi" e "più piccoli"; e, analogamente ai numeri, non esiste un infinito "più grande di tutti".

Concludiamo questa nota accennando all'"ipotesi del continuo", avanzata da Cantor. secondo cui l'infinito con cardinalità immediatamente successiva a quella del numerabile è quello dei numeri reali, e dunque $\mathbf{c} = \aleph_1$. Cantor non riuscì a dimostrare tale ipotesi, nonostante numerosi tentativi protrattisi per molti anni. Oggi, a seguito del lavoro di grandi logici, quali l'austriaco Kurt Gödel (1906-1978) e lo statunitense Joseph Cohen (1934-2007), sappiamo che l'ipotesi del continuo non può essere dimostrata né vera né falsa. Il fatto che un affermazione non possa essere né provata né refutata non deve sorprendere: il teorema di incompletezza di Gödel afferma proprio che all'interno di un sistema di assiomi (come quelli alla base della matematica) esistono sempre affermazioni di questo tipo.

Ma questa è un'altra storia.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna, si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.