

Uragani e tornado

Annibale D'Ercole

FENOMENI atmosferici quali l'insorgere di venti, la formazione di nubi e le precipitazioni di pioggia, grandine e neve si producono continuamente. In genere non sono sufficientemente intensi da provocare danni ma anzi, nella giusta misura apportano benefici. Vi sono però anche fenomeni estremamente energetici e pericolosi. In questa nota ci occuperemo, sia pure schematicamente, di due di questi: i cicloni tropicali e i tornado.

In estrema sintesi i cicloni tropicali sono perturbazioni atmosferiche costituite, come vedremo tra poco, da correnti ascensionali calde e a bassa pressione attorno a cui ruotano nubi e venti velocissimi (che possono toccare i 250-300 km/h) che formano vortici del diametro di alcune centinaia di chilometri. Il termine "ciclone" deriva dal greco e significa "spira di serpente" mentre l'aggettivo "tropicale" è dovuto al fatto che questi cicloni si formano in due strisce di latitudine comprese tra i 5° e 30° sia a nord che a sud dell'equatore, più o meno la regione delimitata dal tropico del Cancro e quello del Capricorno posti, rispettivamente, alle latitudini $\pm 23^{\circ}27'$. In base al luogo in cui avviene la loro formazione, i cicloni tropicali assumono diversi nomi; ad esempio, nell'Oceano Pacifico sono chiamati tifoni, in quello Atlantico uragani (in inglese *hurricane*, dal nome del dio caraibico del male *Hurican*). Il fatto che i nomi evocano qualcosa di temibile è giustificato dal fatto che i cicloni possono avere un effetto estremamente rovinoso. Sospinti dai venti ambientali, infatti, i cicloni possono trasferirsi sulla terraferma provocan-

do danni enormi. Il vento più veloce mai osservato è stato di 368 km/h, mentre nel 1979 il tifone Tip si è esteso su un'area di oltre 2100 km di diametro. L'energia rilasciata ogni 20 minuti può arrivare ad essere 1000 volte superiore all'energia della bomba atomica di Hiroshima. Anche senza raggiungere queste cifre da record, i cicloni creano grandi disastri come è accaduto, ad esempio, nel sud degli Stati Uniti nel 2005 con l'uragano Katrina (FIG. 2a) che provocò circa 1800 morti oltre a danni materiali per più di 100 miliardi di dollari.

Un ciclone tropicale è una sorta di enorme macchina termica alimentata da aria calda e umida. Per questo motivo si forma sulle calde acque tropicali. Se una determinata regione di oceano ha almeno 27° C di temperatura superficiale e fino a 50 m di profondità (per assicurare una sufficiente riserva di energia termica) l'aria a contatto con l'acqua si scalda e si muove verso l'alto¹ lasciando dietro di sé una zona di minor densità e dunque di minor pressione.² L'aria circostante, sospinta dalla propria maggiore pressione, converge verso tale zona prendendo il posto di quella che si è innalzata. Anche quest'aria "di rimpiazzo" diventa umida e calda e si innalza a sua volta. Si crea così una corrente ascensionale. Con l'altezza l'aria si raffredda per espansione e il vapore condensa in nubi. Quest'ultimo processo produce calore (detto calore latente di condensazione)³ che rinforza la corrente ascensionale riducendone ulteriormente la pressione. Un ciclone è in grado di pompare verso l'alto 2 milioni di tonnellate d'aria al secondo.

* Questa rubrica – iniziata nel 1999 e che ha ormai superato gli ottanta numeri – si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del *Giornale di Astronomia*, <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

¹ L'aria calda, espandendosi, diventa meno densa dell'aria circostante e tende a "galleggiare" verso l'alto per il principio di Archimede. Per questo stesso motivo il fumo di una sigaretta si muove verso l'alto.

² Per una fissata temperatura, la pressione di un gas in un recipiente è dovuta alle collisioni nell'unità di tempo esercitate dalle molecole del gas con le pareti del recipiente. Se la densità del gas diminuisce, conseguentemente diminuisce anche il numero di collisioni nell'unità di tempo, cioè la pressione.

³ Se forniamo calore ad una goccia d'acqua, essa si trasforma in vapore. Nel processo inverso il vapore che si condensa in gocce – che passa, cioè, dallo stato gassoso a quello liquido – rilascia calore.

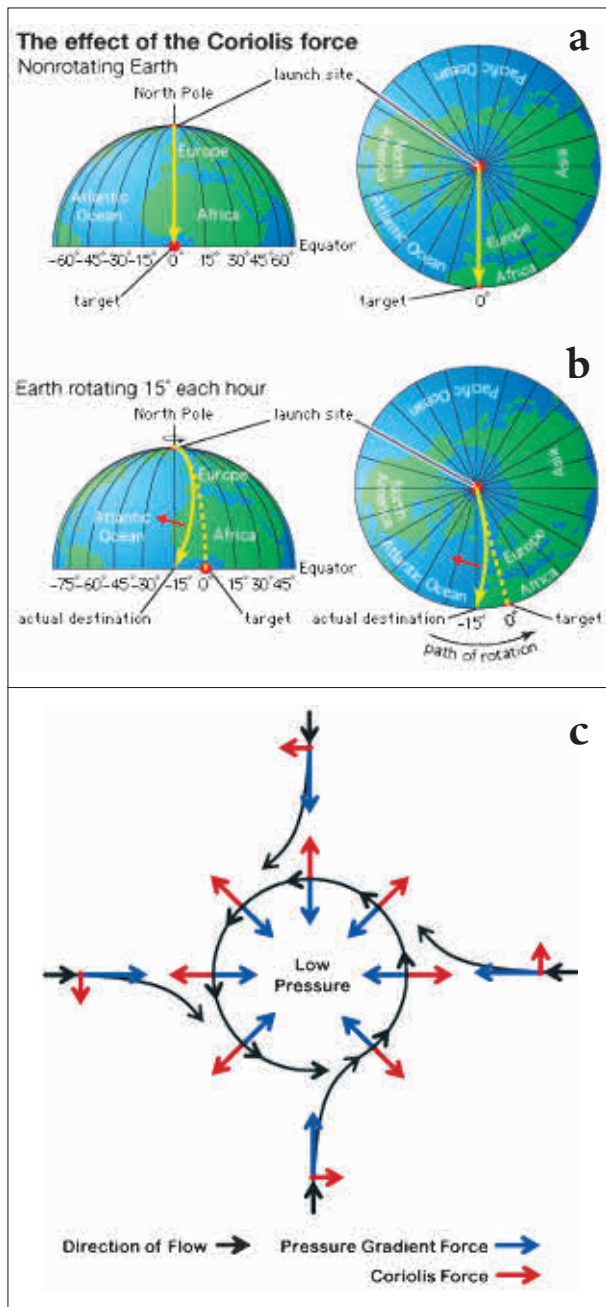


FIG. 1. La forza di Coriolis. a) Supponiamo che la Terra non ruoti e che dal polo nord lanciamo un proiettile destinato a raggiungere un bersaglio posto sull'equatore (punto rosso). Il proiettile giungerà a destinazione muovendosi "dritto davanti a sé" e seguendo il meridiano sottostante. b) Dal momento che la Terra ruota in senso antiorario (se vista da sopra il polo nord) l'oggetto, pur mantenendo una traiettoria "rettilinea", non raggiungerà il bersaglio che nel frattempo si è spostato ad est. Per noi terrestri che ci muoviamo insieme alla Terra, quest'ultima risulta ferma e il mancato centraggio del bersaglio ci appare dovuto ad una curvatura verso ovest della traiettoria. Benché sia frutto unicamente di un diverso punto di vista, risulta comodo attribuire la curvatura all'azione di una forza fittizia – detta forza di Coriolis – che agisce ortogonalmente alla velocità dell'oggetto (freccia rossa). c) Origine della rotazione di un tornado. Le linee nere rappresentano le traiettorie di elementi d'aria che si dirigono verso una regione di bassa pressione sospinte dalla propria maggior pressione (freccie azzurre). A causa della forza di Coriolis le traiettorie si incurvano formando un moto rotatorio antiorario lungo cui le forze di pressione e quella di Coriolis si equivalgono. Questo diagramma si riferisce a quel che accade nell'emisfero nord. In quello sud la rotazione è antioraria.

Nella descrizione appena data abbiamo trascurato un dettaglio essenziale per l'esistenza stessa del

tornado, ossia la sua rotazione. Nel convergere verso la "colonna" ascensionale a bassa pressione l'aria circostante non procede linearmente ma segue una traiettoria curva. Questo effetto è dovuto alla *forza di Coriolis*⁴ come conseguenza della rotazione terrestre (FIG. 1). Dunque, gli elementi d'aria che si avvicinano da diverse direzioni verso l'asse del ciclone non finiscono per scontrarsi ma ruotano attorno ad esso con velocità sempre più elevate man mano che si avvicinano al centro (proprio come un pattinatore che stringendo a sé le braccia accelera la sua rotazione; si veda il livello avanzato). Se così non fosse il ciclone non potrebbe formarsi. In base alle caratteristiche della forza di Coriolis, i cicloni che si creano nell'emisfero nord ruotano in senso antiorario, mentre il contrario accade nell'emisfero sud.⁵ Una volta innescata la rotazione le forze che agiscono sono quella dovuta alla differenza di pressione fra l'interno e l'esterno del ciclone stesso che è diretta verso l'interno, e le forze centrifuga e di Coriolis dirette verso l'esterno (FIG. 1c).

Il moto ascensionale segue dunque una circolazione spiraleggiante che viene comunicata alle nubi che si formano per condensazione e che circondano il cosiddetto "occhio" (*eye* in inglese) del ciclone, una regione quasi calma posta al centro dell'uragano e con diametri che variano da pochi chilometri ad oltre 100 km. La forza centrifuga giustifica l'assenza di nubi nell'occhio. Le nubi attorno all'occhio formano una spessa regione anulare, una sorta di "muro" (*wall* in inglese) detto *eyewall* e sede dei venti più veloci e delle piogge più intense, risultando la zona più temibile dell'uragano. Il muro è avvolto da bande a spirale di *cumulonembi* (nubi a forte sviluppo verticale formantesi anch'esse nell'aria calda, umida e instabile) che rilasciano piogge meno intense e ruotano più lentamente a causa della loro maggiore distanza dal centro (in accordo con l'analogia del pattinatore).

Con l'altezza diminuiscono sia la pressione atmosferica esterna all'uragano che quella della corrente ascensionale all'interno dell'*eyewall*. Quest'ultima però cala più lentamente a causa del calore rilasciato dalla condensazione del vapore. Ad una altezza di 15-16 km, pertanto, vi è un ribaltamento della situazione, con la pressione interna maggiore di quella esterna. L'aria umida in ascesa fuoriesce dall'occhio; il vapore condensa in nubi (cirri) e l'aria, essendo più calda dell'atmosfera circostante, tende ad espandersi piuttosto che concentrarsi. Questa inversione del moto radiale produce un'inversione della direzione della forza di Coriolis e i venti in ci-

⁴ Alla forza di Coriolis abbiamo dedicato le Spigolature del n. 3 del 2018.

⁵ Come abbiamo detto, non si formano uragani nella striscia equatoriale compresa tra 5° e -5° di latitudine. Questo perché la forza di Coriolis è sostanzialmente assente in questa regione. Senza entrare nel dettaglio del perché di questa assenza, è chiaro che un ciclone formato a ridosso dell'equatore non "saprebbe" se ruotare in senso orario o antiorario (soprattutto se, nel suo moto di traslazione, attraversasse l'equatore stesso).

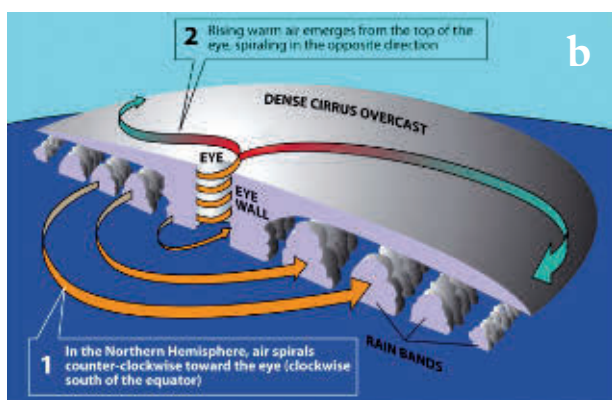
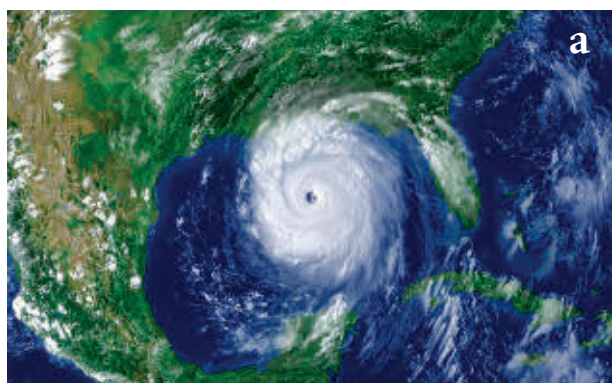


FIG. 2. a) Fotografia satellitare del ciclone Katrina avvenuto nel 2005 che ha devastato, in particolare, la città di New Orleans. b) Anatomia di un ciclone. Sono rappresentati l'occhio, il muro dell'occhio lungo le cui pareti si muove spiraleggiando verso l'alto l'aria calda e umida risucchiata dalla superficie dell'oceano. Attorno alla parete esterna del muro spiraleggiano verso l'alto bande di nubi, ma con velocità circolari minori rispetto a quelle del muro. Piogge torrenziali vengono prodotte dalle nubi nelle bande e, specialmente, dalle nubi che compongono il muro.

ma all'uragano assumono una circolazione oraria (nell'emisfero nord) per poi ridiscendere verso la periferia del ciclone (FIG. 2b).

I cicloni si indeboliscono quando si spostano su aree dell'oceano dove l'acqua è più fredda a causa di una carenza di acqua calda e vapore. Per lo stesso motivo essi perdono potenza quando spostandosi, toccano terra. In questo caso gli uragani più violenti impiegano circa 48 ore a ridurre la loro massima velocità al di sotto dei 40 km/h.

Passiamo ora ad una breve descrizione dei tornado. Con il termine tornado, o tromba d'aria, si intende una perturbazione atmosferica tra le più violente che possa verificarsi. Esso consiste in un gigantesco vortice d'aria che va dalla base di un cumulonembo (a un'altezza tra i 100 e i 1000 metri) fino a terra (FIG. 4a). I tornado sono frequenti nel Messico (il nome tornado deriva dallo spagnolo *tronar*: tuonare), negli Stati Uniti e pure in Italia, anche se da noi sono meno violenti. Alcuni tornado sono stretti, non superando i 75 m di diametro a terra; i più grandi possono arrivare a più di 3 km. I tornado più deboli durano meno di 10 minuti e hanno venti con velocità di rotazione di 160 km/h, mentre quelli più potenti possono durare più di un'ora, con velo-

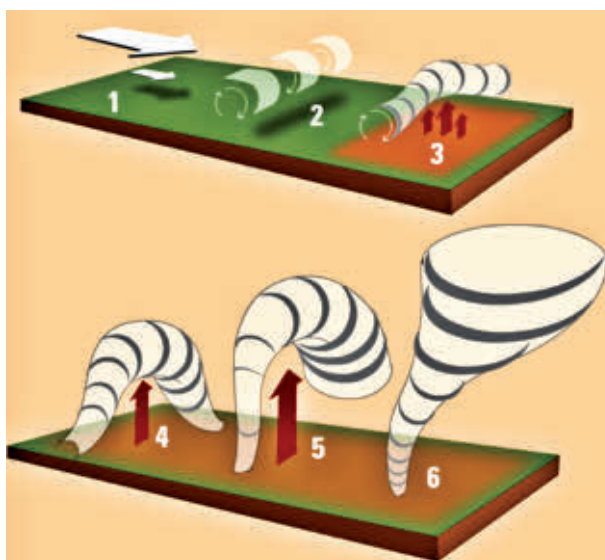


FIG. 3. Diverse fasi della nascita di un tornado. Un vento che spirale parallelamente al terreno ha una velocità che aumenta con l'altezza. L'aria più veloce comincia a ruotare e ad arrotolarsi su quella più lenta, formando una specie di "cilindro" che avanza mantenendo l'asse di rotazione parallelo al terreno. In questa fase il cilindro è ancora invisibile. Passando su un terreno particolarmente caldo il cilindro viene investito dall'aria calda e umida che da questo terreno si muove verso l'alto. Il cilindro allora si solleva e la sua rotazione aumenta se i venti in alta quota spirano in un'opportuna direzione diversa da quella vicino al terreno. Durante la sua ascesa l'aria calda e umida forma nubi e la velocità di rotazione aumenta.

cià del venti che possono arrivare a 500 km/h. Infine, le trombe d'aria si spostano con velocità fino a 100 km/h.

Inoltre, vi è più di un meccanismo di formazione. Noi qui ne daremo una descrizione estremamente concisa e necessariamente incompleta. Le condizioni perché un tornado possa formarsi sono sostanzialmente due: 1) la presenza di un'atmosfera instabile che si verifica quando l'aria calda e umida a bassa quota (tra 0 e 1000 metri) sale incontrando l'aria fredda e secca che si trova più in alto; 2) il verificarsi di venti variabili di intensità e direzione in quota progressiva. La variazione della velocità del vento con l'altezza produce inizialmente una sorta di cilindro d'aria che procede in avanti ruotando attorno ad un asse parallelo al terreno (FIG. 3). La corrente ascendente di aria calda e umida "spinge" l'asse di rotazione ponendolo in posizione verticale. Il cilindro assume una forma a imbuto perché, nella parte superiore della colonna, l'aria in ascesa si espande aumentando umidità relativa e condensazione e formando un cumulonembo al cui interno si verifica una violenta discesa di pioggia e di aria trascinata e raffreddata dalla pioggia stessa (FIG. 4). In questo quadro, pertanto, la nube temporalesca si forma assieme al tornado. Trombe d'aria con questa origine sono relativamente deboli e di breve durata.

Trombe d'aria più potenti si realizzano quando si formano successivamente alle nubi temporalesche. Queste ultime, come ormai abbiamo imparato, si

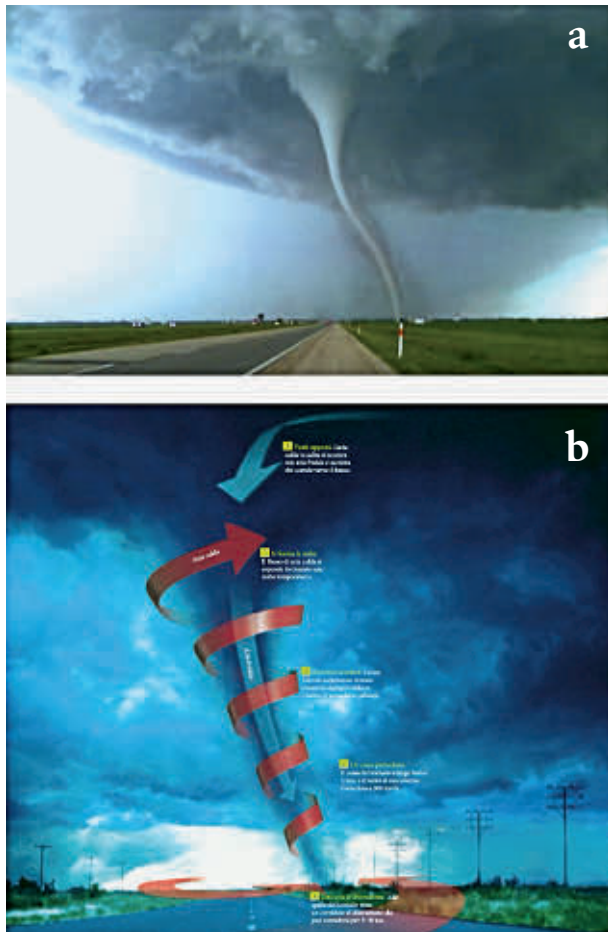


FIG. 4. a) Fotografia di un tornado. b) Anatomia di una tromba d'aria. L'aria calda sale spiraleggiando e si scontra con aria fredda e asciutta che scende verso il basso. Il flusso di aria calda si espande formando una nube temporalesca. I venti laterali accentuano (se diretti opportunamente) il moto rotatorio della corrente ascensionale e il tornado si rafforza.

formano dall'incontro di correnti ascensionali umide e calde con l'aria fredda e secca in quota. Se le condizioni dei venti sono favorevoli (in intensità e direzione) alle varie altezze, la corrente ascensionale che alimenta la nube ruota vorticosamente e viene detta *mesociclone*. Le nubi che "ospitano" un mesociclone vengono dette *supercelle*. Per motivi non ancora pienamente compresi una supercella può sviluppare alla sua base una sorta di appendice conica ruotante. Se questa appendice tocca terra abbiamo il tornado.

Indipendentemente dalle sue origini, un tornado si esaurisce quando l'aria nei bassi strati tende a raffreddarsi per via della precipitazione e dunque l'ascesa dell'aria caldo-umida tende a cessare.

Anni fa un ragazzino statunitense di circa 10 anni, Craig Burnham, pose due bottiglie una sopra l'altra mettendo a contatto le rispettive aperture e fissando il tutto con del nastro adesivo non prima di aver posto una rondella tra le aperture stesse riducendo così il foro di comunicazione tra le botti-

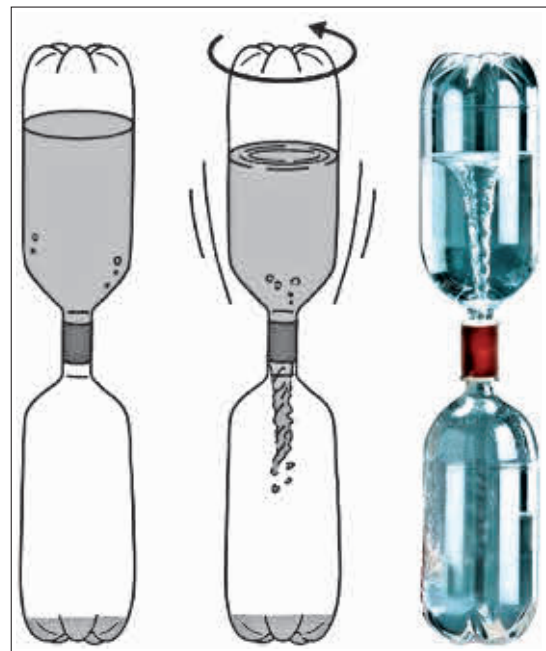


FIG. 5. Il disegno nel primo pannello mostra come un sia pur esiguo iniziale passaggio d'acqua dalla bottiglia superiore a quella inferiore è sufficiente ad impedire ogni ulteriore travaso. Il secondo disegno illustra l'avvio di un vortice (con conseguente sostanziale passaggio d'acqua) a seguito di un iniziale strattone circolare. La fotografia nel terzo pannello illustra il vortice definitivamente strutturato.

glie. Precedentemente la bottiglia inferiore era stata riempita d'acqua per circa due terzi. Il giovane Craig intendeva costruire una clessidra ad acqua e si aspettava che, capovolgendo la coppia di bottiglie, il lento travaso d'acqua (la rondella applicata aveva un foro alquanto piccolo) verso il basso avrebbe segnato lo scorrere del tempo. Con sorpresa (e delusione), dopo i primi sgocciolamenti l'acqua smise di cadere e il ragazzino mise da parte la fallimentare clessidra. Una volta divenuto adulto la riprese e l'agitò brevemente in senso rotatorio. Questa volta l'acqua prese a scorrere regolarmente e velocemente formando un vortice che simula un minitornado (FIG. 5). Craig battezzò Tornado Tube il suo giocattolo scientifico e lo brevettò. Il primo anno ne vendette circa 500.000 unità e successivamente svariati milioni in tutto il mondo.

Perché il Tornado Tube si rivelò una pessima clessidra ma un ottimo simulatore di tornado? Quando il sistema è capovolto, se l'acqua non è in rotazione la tensione superficiale (FIG. 6) crea una sorta di pellicola d'acqua che chiude il foro di comunicazione tra le due bottiglie. Sulla pellicola insiste – diretta verso il basso – una pressione dovuta al peso dell'acqua più la pressione atmosferica dovuta all'aria sopra di essa. Al contrario, l'aria contenuta nella bottiglia inferiore esercita sulla pellicola unicamente una pressione atmosferica. Quest'ultima è dunque minore della pressione superiore che "gonfia" la pellicola fino a formare

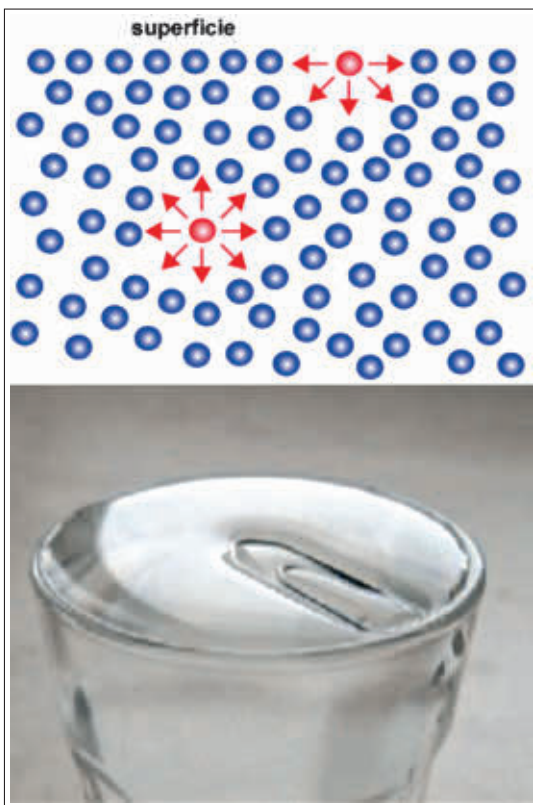


FIG. 6. Pannello superiore: raffigurazione della tensione superficiale. Tale fenomeno è dovuto alla differenza di comportamento delle particelle sulla superficie rispetto a quelle all'interno di un liquido. Queste ultime formano legami intermolecolari in ogni direzione. Pertanto, le forze si bilanciano. Le forze invece non sono bilanciate per le particelle sulla superficie del liquido perché formano legami intermolecolari solo ai lati e verso l'interno. Questo determina una compressione della massa del liquido in superficie e la formazione di una sorta di pellicola. Pannello inferiore: la tensione superficiale impedisce all'acqua di trascinare ed inoltre consente alla grappetta metallica di non affondare.

una goccia che cade nella bottiglia in basso. La pellicola poi si riforma ed il meccanismo si ripete facendo sgocciolare ulteriori gocce d'acqua. Questo sia pur piccolo travaso diminuisce il livello dell'acqua e aumenta il volume a disposizione dell'aria nella bottiglia superiore. Ne segue una diminuzione sia della pressione dell'acqua che di quella dell'aria. Nella bottiglia inferiore avviene il contrario e la pressione dell'aria aumenta. Le pressioni superiore e inferiore infine si uguagliano spingendo in ugual misura contro la pellicola che, in queste condizioni, impedisce ulteriori passaggi d'acqua.

Supponiamo ora di dare un'iniziale breve scossone in senso rotatorio al Tornado Tube e concentriamo l'attenzione su un singolo elemento d'acqua assunto cubico per semplicità e caratterizzato da una velocità di rotazione v attorno all'asse z (l'asse di simmetria della bottiglia), da una distanza r da tale asse e da una massa $dm = \rho dr^3$, dove ρ è la densità dell'acqua. Nel caso ideale in cui è possibile trascurare gli effetti di attrito tra le varie particelle

d'acqua (ossia la viscosità) e l'adesione con le pareti della bottiglia, sulla particella d'acqua non agisce alcun effetto frenante e si conservano pertanto sia l'energia che il momento angolare. Quest'ultimo è definito come $dmrv = dmr_i v_i \equiv dmK$, dove la costante K dipende dalla distanza iniziale r_i dall'asse z e dalla velocità di rotazione iniziale v_i al momento dello scossone di partenza. Ne segue pertanto $v = K/r$ (FIG. 7c), ossia la velocità di rotazione di un elemento d'acqua aumenta al diminuire della sua distanza dall'asse z (in accordo con l'analogia del pattinatore data nel livello base).

Ogni elemento d'acqua spiraleggia verso il foro di uscita percorrendo spire sempre più strette centrate attorno all'asse z . Conseguentemente aumentano la velocità di rotazione e la forza centrifuga a cui è sottoposto. Questa forza spinge radialmente verso l'esterno costringendo l'acqua al momento della fuoriuscita a passare vicino al bordo del buco evitando la regione centrale; questo permette all'aria della bottiglia inferiore di salire attraverso tale regione formando un canale che giunge fino alla superficie superiore dell'acqua. Lo scambio continuo di aria e di acqua tra le due bottiglie permette ad entrambe di fluire velocemente ed ordinatamente senza "singhiozzi".⁶

All'aumentare della profondità (ossia, al diminuire di z) la pressione dell'acqua cresce. Questo aumento di pressione comprime il canale centrale sempre più conferendogli il tipico profilo a tromba (FIG. 7b). Il canale, tuttavia, pur restringendosi sempre più, non si chiude del tutto per via della forza centrifuga che si oppone all'azione "stringente" della pressione.

In sintesi, il profilo della superficie libera dell'acqua (ossia la superficie a contatto con l'aria) dipende dalla contrapposizione tra la forza centrifuga che aumenta al diminuire di r e la pressione dell'acqua che aumenta al diminuire di z . Si può dimostrare (si veda più sotto) che il risultato è dato dalla seguente formula:

$$z(r) = -\frac{K^2}{2gr^2} + h, \quad (1)$$

dove g è l'accelerazione di gravità e la costante h rappresenta la profondità dell'acqua indisturbata a grande distanza dal vortice. Tale costante può essere scritta come

$$h = \frac{K^2}{2gr_f^2}, \quad (2)$$

⁶ Se capovolgiamo una singola bottiglia piena d'acqua (senza imprimerle alcun previo moto di rotazione) questa si verserà a fiotti e non uniformemente perché ogni tanto deve interrompere il suo flusso per lasciar entrare l'aria che viene risucchiata verso il volume lasciato libero proprio dall'acqua in caduta.

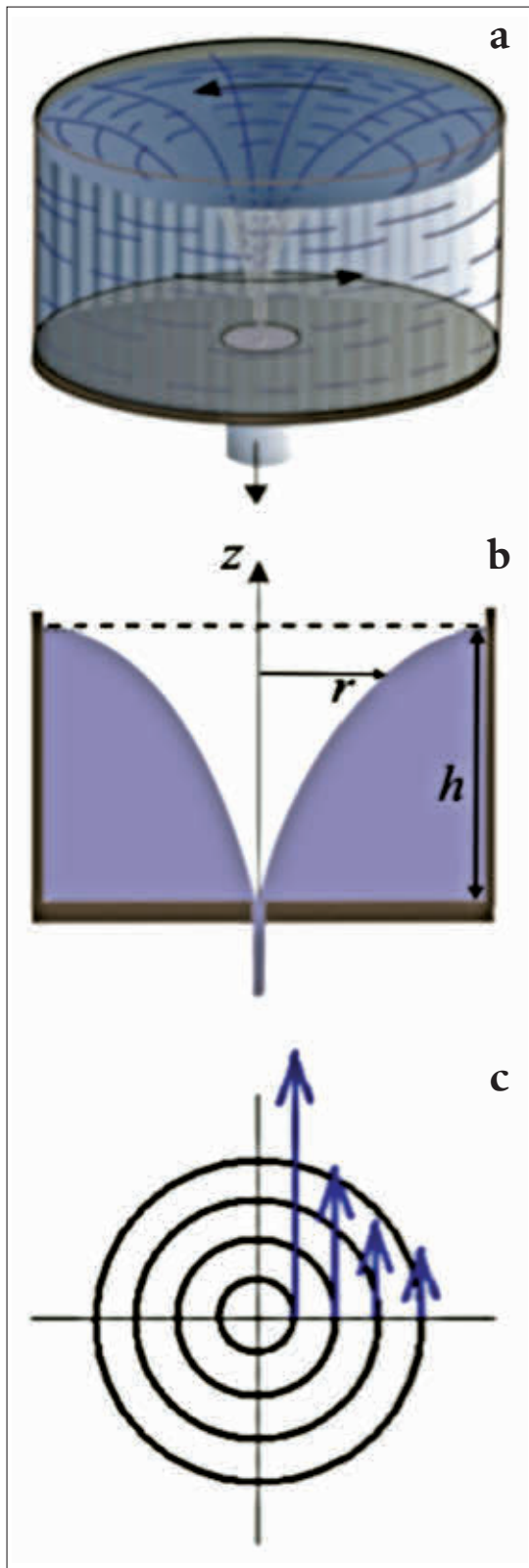


FIG. 7. a) Vortice libero che mostra la tipica struttura “a tromba”. b) Profilo della superficie libera del vortice. La linea tratteggiata indica il livello dell’acqua imperturbata, lontana dal vortice. La doppia freccia verticale indica la profondità h dell’acqua imperturbata. c) Traiettorie di particelle diverse su di un piano orizzontale posto ad una generica altezza z . Le frecce indicano la velocità v circolare che cresce al diminuire del raggio r delle traiettorie. In prima approssimazione quest’ultime possono essere considerate dei cerchi perché le componenti della velocità verticale v_z e radiale v_r , sono trascurabili rispetto alla componente v .

dove r_f rappresenta il raggio del foro di uscita. Dalle eqq. (1) e (2) si vede quindi che il profilo del tornado è un’iperbole (al quadrato), che ricorda il profilo a tromba discusso più sopra. Per $r \gg r_f$ il primo termine dell’eq. (1) tende a zero e abbiamo $z \approx h$. Se invece $r \approx r_f$ abbiamo $z \approx 0$.

Vale la pena sottolineare che, a dispetto dell’estrema somiglianza con i tornado veri, il Tornado Tube funziona al contrario di quest’ultimi perché l’aria nel tunnel fluisce dal basso verso l’alto e non viceversa, come abbiamo imparato nel livello base.

Nel seguito verificheremo la validità delle eqq. (1) e (2). Il lettore non interessato può terminare qui la sua lettura.

Fissiamo l’attenzione su un piccolo elemento cubico di acqua posto ad una determinata altezza z_0 dal fondo e i cui lati sono pari a dr (FIG. 8). Dalle espressioni date in precedenza concernenti la velocità circolare e la forza centrifuga, possiamo scrivere quest’ultima come

$$F_c = dm \frac{K^2}{r^3}. \quad (3)$$

In assenza di attrito si crea una situazione di equilibrio per cui la forza centrifuga che spinge verso l’esterno è bilanciata dalla pressione che spinge verso l’interno. Ad una generica quota z_0 (dal fondo del recipiente) la pressione $p(r)$ in un punto a distanza r dal centro è data dal peso della colonna d’acqua di sezione unitaria che grava su quel punto.⁷ Definiamo allora $p(r) = g\rho [z(r) - z_0]$ la pressione esercitata sulla faccia interna del cubetto posizionata alla distanza r dall’asse di rotazione (FIG. 8). Analogamente è possibile definire la pressione sulla parete opposte del cubetto come $p(r + dr) = g\rho [z(r + dr) - z_0]$.

La spinta radiale netta subita dal cubetto ad opera della pressione è $F_p = [p(r + dr) - p(r)] dr^2$, dove dr^2 rappresenta la superficie della parete del cubetto. Dal momento che $z(r + dr) > z(r)$, abbiamo $p(r + dr) > p(r)$; F_p è pertanto rivolta verso l’asse di rotazione e si oppone alla forza centrifuga. Perché vi sia equilibrio è necessario che sia $F_p = F_c$, ossia

$$g\rho [z(r + dr) - z(r)] dr^2 = \rho dr^3 \frac{v^2}{r},$$

da cui

$$\frac{z(r + dr) - z(r)}{dr} = \frac{K^2}{gr^3}. \quad (4)$$

⁷ In verità andrebbe aggiunta anche la pressione atmosferica dell’aria sopra l’acqua. Tuttavia, come stiamo per vedere, quello che interessa è la differenza di pressione tra altezze diverse. Dal momento che la densità dell’aria è poco più di un millesimo di quella dell’acqua, la differenza di pressione dell’aria è trascurabile rispetto a quella dell’acqua.

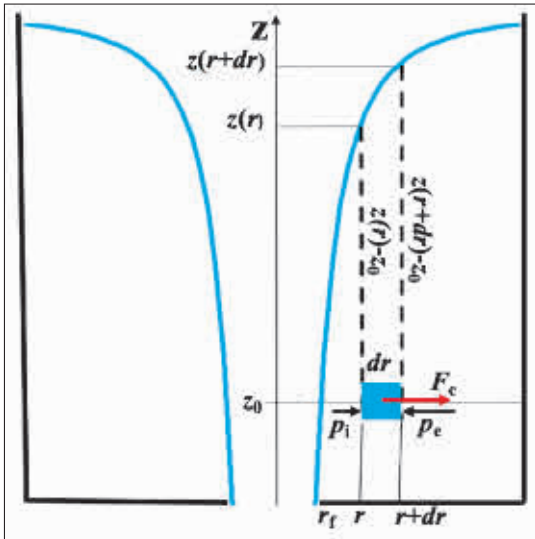


FIG. 8. Le linee azzurre continue mostrano il profilo della superficie libera dell'acqua. Il quadrato rappresenta un "cubetto" d'acqua di lato dr mentre la freccia rossa indica la forza centrifuga F_c . z_0 e r_f sono, rispettivamente, l'altezza del cubetto dalla base del recipiente e il raggio del foro di uscita. Le due linee tratteggiate verticali indicano rispettivamente la profondità a cui si trovano la faccia del cubetto rivolta verso l'asse z e la faccia opposta. Le due frecce nere rappresentano le pressioni $p_i \equiv \rho_g [z(r) - z_0]$ e $p_e \equiv \rho_g [z(r+dr) - z_0]$ a cui sono sottoposte queste due facce. Infine, le due linee sottili verticali sono poste per guidare l'occhio ai valori del raggio corrispondenti ai due spigoli del cubetto.

Come abbiamo anticipato, la soluzione dell'eq. (4) è data dall'eq. (1). Lo si può facilmente verificare partendo da quest'ultima e procedendo nel seguente modo:

$$\begin{aligned} z(r+dr) &= -\frac{K^2}{2g(r+dr)^2} + h \\ &= -\frac{K^2}{2g(r^2 + 2rdr + dr^2)} + h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{K^2}{2gr^2(1+2x+x^2)} + h \\ &\approx -\frac{K^2}{2gr^2(1+2x)} + h, \end{aligned} \quad (5)$$

dove $x \equiv dr/r$; dal momento che $dr \ll r$, abbiamo $x^2 \ll x \ll 1$ e possiamo trascurare x^2 nell'ultimo passaggio. Tenuto conto delle eqq. (1) e (5) possiamo scrivere la eq. (4) come:

$$z(r+dr) - z(r) \approx -\frac{K^2}{2gr^2} \left(\frac{1}{1+2x} - 1 \right) \approx \frac{K^2 x}{gr^2}$$

dove l'ultimo passaggio è stato ottenuto trascurando $2x$ rispetto a 1 nel comun denominatore nella parentesi. Tenuto conto della definizione di x abbiamo riottenuto l'eq. (4) verificando così che essa è effettivamente soddisfatta dall'eq. (1). Quest'ultima ci dice come varia la "quota" z in funzione di r di una generica particella d'acqua man mano che questa si avvicina al fondo. Se vogliamo ottenere il profilo $z(r)$ della superficie dell'acqua è necessario che la particella disti dall'asse di rotazione non più r_f di quando $z = 0$, altrimenti l'acqua non fuoriesce. Per ottenere questo è necessario che h sia dato proprio dall'eq. (2).

Per dimostrare – e non solo verificare – che l'eq. (1) è la soluzione dell'eq. (4) bisogna seguire il percorso inverso a quello testé realizzato, bisogna cioè partire dall'eq. (4) per arrivare all'eq. (1). Per fare questo sono necessarie conoscenze, sia pure superficiali, di analisi matematica.⁸

⁸ Definiamo per concisione la costante $A \equiv K^2/g$ e passiamo dalle differenze finite agli infinitesimi scrivendo l'eq. (4) come $dz = A dr/r^3$. Passiamo poi all'integrazione $\int_0^z dz = A \int_{r_f}^r dr/r^3$. L'effettuazione di questi semplici integrali porta alla soluzione data dall'eq. (1): $z = 0.5 A (-1/r^2 + 1/r_f^2)$.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF-Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.