Spigolature astronomiche*

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna

Fermat e il bagnino

Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna

Immaginiamo un bagnino che, dalla spiaggia, udendo delle invocazioni di aiuto, si precipiti in acqua per raggiungere al più presto un bagnante in difficoltà. Sebbene il segmento di retta che congiunge idealmente il bagnino al bagnante sia il più breve tra tutti i possibili percorsi, esso non è quello che implica il minor tempo di percorrenza. Infatti, il bagnino si muove più velocemente sulla sabbia e più lentamente in acqua. È dunque ragionevole pensare che, per arrivare il prima possibile fino al bagnante, il bagnino debba seguire una traiettoria che privilegi il percorso sulla terra ferma riducendo quello in acqua. D'altra parte, non bisogna esagerare nell'allungare il tragitto sulla sabbia, altrimenti l'aumento del suo tempo di percorrenza supera il guadagno ottenuto nel ridurre il percorso in acqua. Esiste un'unica traiettoria che minimizza il tempo necessario al bagnino per giungere a destinazione, ma dubitiamo che egli perda tempo a calcolarla (Fig. 1).

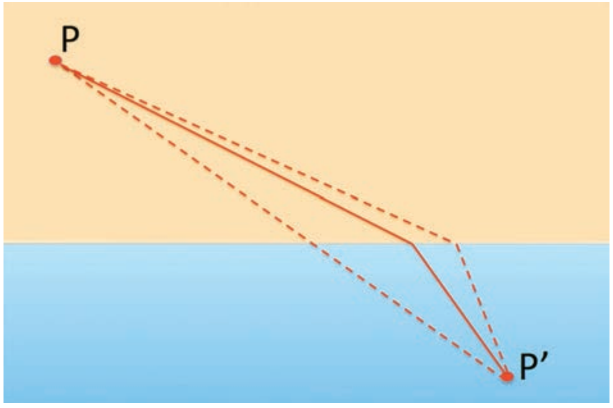

Fig. 1. Rappresentazione schematica del problema del bagnino. Un bagnino si trova sulla spiaggia nel punto P e deve raggiungere nel minor tempo possibile un bagnante in difficoltà che si trova in P'. Il bagnino si muove più velocemente sulla sabbia e più lentamente in acqua. Pertanto, sebbene il segmento PP' sia il più breve tra tutti i possibili tragitti, esso non è quello col minor tempo di percorrenza che invece è indicato dalla linea (spezzata) continua (si veda il testo).

Benché probabilmente la maggior parte dei bagnini non ne sia cosciente, il quesito che abbiamo appena esposto rappresenta un problema filosofico che affonda le sue radici fin nei tempi di Aristotele ed ha percorso lo sviluppo della fisica fino ai giorni nostri. Nell'ascoltare il rintocco di una campana, possiamo porci la domanda: perché suona? Possiamo dare due possibili risposte: *i*) la campana suona per richiamare i fedeli alla messa; oppure *ii*) la campana suona perché le oscillazioni provocate dal campanaro inducono il batacchio ad urtare contro il bordo della campana provocando il suono. Nel primo caso abbiamo una risposta di tipo *finalistico*: un evento (in questo caso, il suono della campana) accade al fine di produrre l'effetto finale (l'adunanza dei fedeli). La seconda risposta è di tipo *meccanicista*: un evento accade per via di una causa di origine fisica, materiale, che lo precede temporalmente (in questo caso, le oscillazioni della campana).

Probabilmente, a questo punto il lettore si starà chiedendo che relazione ci sia tra le campane, i bagnini e Pierre de Fermat (1601-1665), il matematico e magistrato francese citato nel titolo di questa nota. Vediamo dunque di collegare questi argomenti.

Nell'antica Grecia gli atomisti Leucippo (v secolo a.C.) e Democrito (460-370 a.C.) descrissero la natura in termini di atomi in moto caotico nello spazio vuoto, una visione sorprendentemente simile a quella attuale. Essi giunsero a questo risultato seguendo la logica meccanicista. Nello stesso perio-

* Questa rubrica si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», www.bo.astro.it/sait/giornale.html.

do Socrate (469-399 a.C.), Platone (427-347 a.C.) e Aristotele (384-322 a.C.) adottarono invece la prospettiva finalistica secondo cui gli eventi naturali accadono in funzione del risultato finale.[1] Oggi sappiamo che solo il meccanicismo si è rivelato efficace nella descrizione dei fenomeni fisici. Sfortunatamente per la scienza, però, da Aristotele in poi prevalse l'attitudine finalistica. Soltanto a partire dal XVII secolo tale attitudine venne sostanzialmente ribaltata grazie a personaggi del calibro di Cartesio (1596-1650), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) ed altri. Ma il finalismo continuò a covare sotto le ceneri. Persisteva la convinzione che il mondo dei fenomeni meccanici non potesse essere ridotto agli effetti di cause esterne, cieche e puramente materiali. Il corso dei processi naturali è la manifestazione della volontà di Dio, il quale ha ordinato il mondo secondo principi saggi e razionali. Fu con questa attitudine mentale che Fermat arrivò a spiegare il fenomeno della rifrazione.

Un raggio di luce che passa dall'aria ad un altro mezzo, ad esempio acqua o vetro, viene in parte riflesso dalla superficie di separazione dei due mezzi e in parte attraversa il secondo mezzo deviando dalla direzione originaria; questo secondo raggio viene detto raggio rifratto. Gli scienziati greci ed arabi avevano studiato la relazione tra l'angolo di incidenza e quello di rifrazione, ma non erano stati in grado di formulare una legge generale di correlazione. Nel Seicento era tuttavia ormai noto che il raggio rifratto deflette in modo tale che in seno dell'angolo di incidenza sia sempre in un rapporto fisso con il seno dell'angolo di rifrazione, ovvero $(\sin\alpha/\sin\gamma)$ = costante. Questa relazione viene detta legge di Snell e il valore della costante vale circa 1,3 per l'acqua e 1,5 per il vetro (Fig. 2).

Nel tentativo di trasformare in una legge fisica quella che era soltanto una constatazione di una relazione geometrica, Fermat ricercò la spiegazione nel principio metafisico finalistico secondo cui la Natura segue sempre il percorso più semplice. In particolare, un raggio luminoso segue il cammino più rapido; tale cammino coincide con quello più corto se la luce si muove all'interno dello stesso mezzo (ad esempio, l'aria) e dunque sempre con la stessa velocità. Se invece la luce attraversa mezzi diversi, ciascuno con una diversa velocità, il tragitto con il minor tempo di percorrenza non coincide con una retta, ma è tale per cui il raggio luminoso compie un percorso maggiore nel mezzo in cui procede più velocemente e minore in quello in cui procede più lentamente;[2] si può dimostrare che questo tragitto soddisfa la legge di Snell ed è dunque quello effettivamente seguito dalla luce (si veda il livello avanzato). Questo risultato viene detto "principio di Fermat".

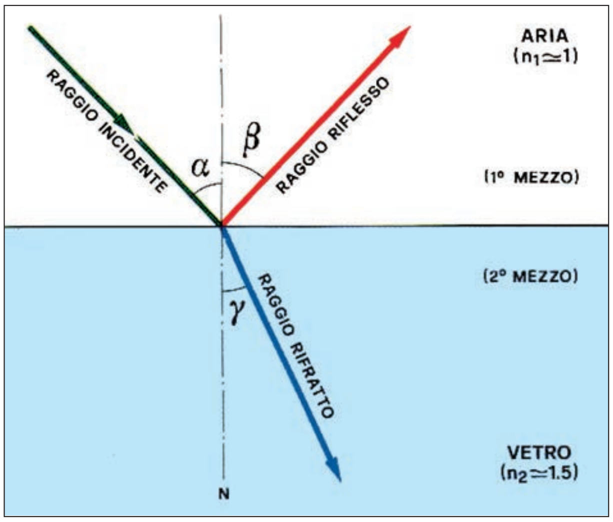

Fig. 2. Un raggio di luce che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi con indice di rifrazione *n* diversi (in questo caso aria e vetro) viene in parte riflesso e in parte rifratto. L'angolo di incidenza α e quello di riflessione β sono uguali, mentre α e l'angolo di rifrazione γ seguono la legge di Snell $\sin\alpha/\sin\gamma = n_2/n_1$, dove n_1 e n_2 rappresentano l'indice di rifrazione dei due mezzi (si veda il livello avanzato).

Dunque, in base ad una logica finalistica il matematico francese fu in grado di spiegare la legge di Snell mostrando che, nel passare da un mezzo ad un altro con diversa velocità, i raggi luminosi percorrono il tragitto più rapido risolvendo "automaticamente" un problema del tutto simile a quello del bagnino descritto in apertura. Questo fatto pone naturalmente vari quesiti: come fa la luce a conoscere "a priori" qual è il percorso più rapido da intraprendere? È possibile che la Natura sia effettivamente regolata da una logica finalistica? In verità una reale comprensione del comportamento della luce si ottiene solo ricorrendo alla meccanica quantistica; l'argomento è complesso e decisamente al di là degli scopi di questa nota. Qui ci limiteremo a dire che la luce, nella descrizione quantistica, è composta da *fotoni*, minuscole particelle il cui movimento non è perfettamente definito come ci si attenderebbe in fisica classica (ne abbiamo parlato nel «Giornale di Astronomia», n. 4 del 2008). Piuttosto, ogni fotone può percorrere qualunque traiettoria, sia pure con diverse probabilità. È possibile dimostrare che le probabilità di gran lunga maggiori attengono alla traiettoria di minor tempo ed a quelle ad essa assai vicine. L'insieme dei fotoni che percorrono queste traiettorie compongono il raggio riflesso e quello rifratto che soddisfa la legge di Snell.[3]

[1] Secondo Aristotele, un grave si muove verso il basso non *a causa* di una forza che lo attira, ma *al fine* di giungere a terra, il suo luogo naturale.

[2] Si può facilmente dimostrare che anche nel caso della riflessione il tragitto seguito dalla luce è effettivamente quello che necessita del minor tempo di percorrenza (si veda il livello avanzato).

[3] Anche se "bandito" dalla fisica, il finalismo, secondo alcuni scienziati, potrebbe ricoprire un ruolo importante in biologia.

La luce nel vuoto si propaga con velocità c. In un mezzo trasparente, invece, la sua velocità è minore, e pari a $v = c/n$, dove n è una caratteristica del mezzo detta indice di rifrazione. A titolo esemplificativo, segnaliamo che per aria, acqua e vetro l'indice di rifrazione vale rispettivamente 1,0003, 1,3 e 1,5. Se un raggio luminoso attraversa l'interfaccia tra due mezzi di diverso indice di rifrazione, come ad esempio tra aria e vetro, esso verrà in parte riflesso e in parte rifratto, ossia attraverserà l'interfaccia deviando dalla direzione originaria. Il raggio riflesso formerà con la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi un angolo β uguale a quello α del raggio incidente. L'angolo del raggio rifratto, invece, è regolato dalla legge di Snell

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1}$$

dove α e γ sono gli angoli di incidenza e rifrazione, ed n_1 e n_2 rappresentano l'indice di rifrazione dei mezzi in cui si propagano, rispettivamente, il raggio incidente e quello rifratto (Fig. 2). Entrambi questi risultati soddisfano il principio di Fermat secondo cui la luce si propaga seguendo la traiettoria con il minor tempo di percorrenza.

Consideriamo prima il tragitto d compiuto da un raggio riflesso che parte dal punto P e giunge al punto P'. La lunghezza di questo tragitto è pari a $d = d_1 + d_2$, dove d_1 è la distanza tra P e il punto di incidenza x sulla superficie riflettente e d_2 è la distanza tra x e P'. In base al pannello superiore della Fig. 3 possiamo scrivere:

$$d_1 = \sqrt{a^2 + x^2}, \tag{2}$$

$$d_2 = \sqrt{b^2 + (L - x)^2}, \tag{3}$$

$$t = \frac{1}{v}(d_1 + d_2) = \frac{n}{c}(d_1 + d_2). \tag{4}$$

L'ultima equazione fornisce il tempo necessario al raggio di luce per andare da P a P'. In Fig. 3 sono mostrate solo alcune tra tutte le possibili traiettorie che il raggio luminoso ha "a disposizione" per andare da P a P' dopo una riflessione. Una volta fissati i parametri a, b e L, ognuna di queste traiettorie è individuata dal valore x del suo punto di incidenza. È allora possibile, tramite l'equazione (4), calcolare il tempo di percorrenza della varie traiettorie, variando x nell'intervallo $0 < x < L$.

A scopo esemplificativo, poniamo a = 80 cm, b = 30 cm e L = 100 cm, e calcoliamo t al variare di x. Il pannello inferiore della Fig. 3 mostra che tale tempo esibisce un valore minimo in corrispondenza di x = 72,7; in altri termini, il tragitto individuato dal punto di incidenza x = 72,7 è il più breve tra tutti i percorsi possibili. Calcolando il seno degli angoli α e β per questo caso, otteniamo:

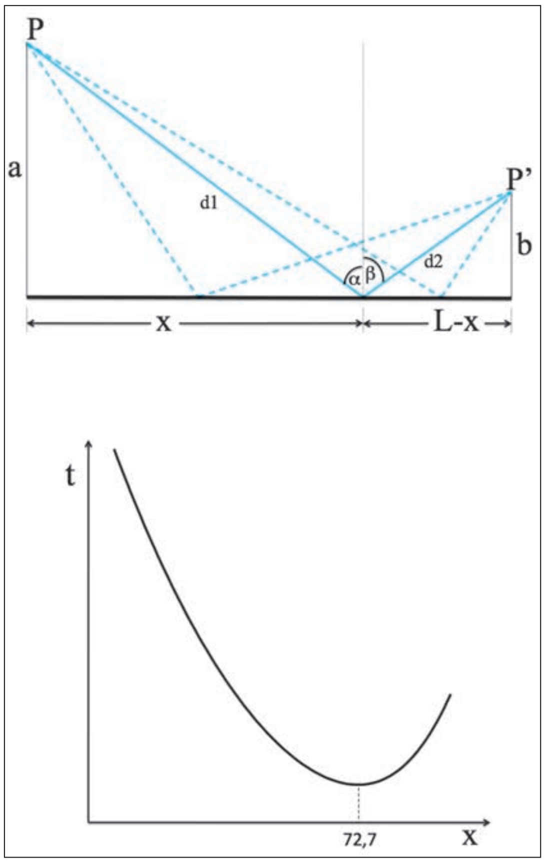

Fig. 3. Nel pannello superiore sono raffigurate (in azzurro) diverse traiettorie a disposizione di un raggio luminoso che parte da P e raggiunge P' dopo una riflessione su una superficie lunga L = 100 cm. La traiettoria indicata dalla linea continua è quella effettivamente seguita dalla luce ed è tale per cui gli angoli α e β, formati rispettivamente dal raggio incidente e quello riflesso con la normale alla superficie riflettente, sono uguali tra loro. Nel pannello inferiore è rappresentato il tempo di percorrenza delle varie traiettorie (linee azzurre nel pannello superiore), in funzione del punto di incidenza x. Il tragitto più veloce è quello con punto di incidenza x = 72,7 cm e corrisponde alla linea azzurra continua del pannello superiore.

$$\sin\alpha = \frac{x}{d_1} = 0,67,$$

$$\sin\beta = \frac{L - x}{d_2} = 0,67.$$

Pertanto, i due seni – e dunque i due angoli – risultano uguali in corrispondenza della traiettoria più breve. Dal momento che in natura si verifica proprio $\alpha = \beta$, se ne deduce che, durante una riflessione, la luce percorre il tragitto più corto.[4] Questo ri-

[4] *Il lettore in possesso di qualche conoscenza di analisi matematica avrà capito che le condizioni per ottenere il minimo valore del tempo di percorrenza si possono ricavare ponendo uguale a zero la derivata di tale tempo rispetto alla variabile x:*

$$\frac{dt}{dx} = \frac{n}{c}\left(\frac{x}{d_1} - \frac{L-x}{d_2}\right) = \frac{n}{c}(\sin\alpha - \sin\beta) \equiv 0.$$

Ne segue che il tragitto col minor tempo di percorrenza è proprio quello per cui l'angolo di riflessione è uguale a quello di incidenza, indipendentemente dai valori delle costanti a, b ed L.

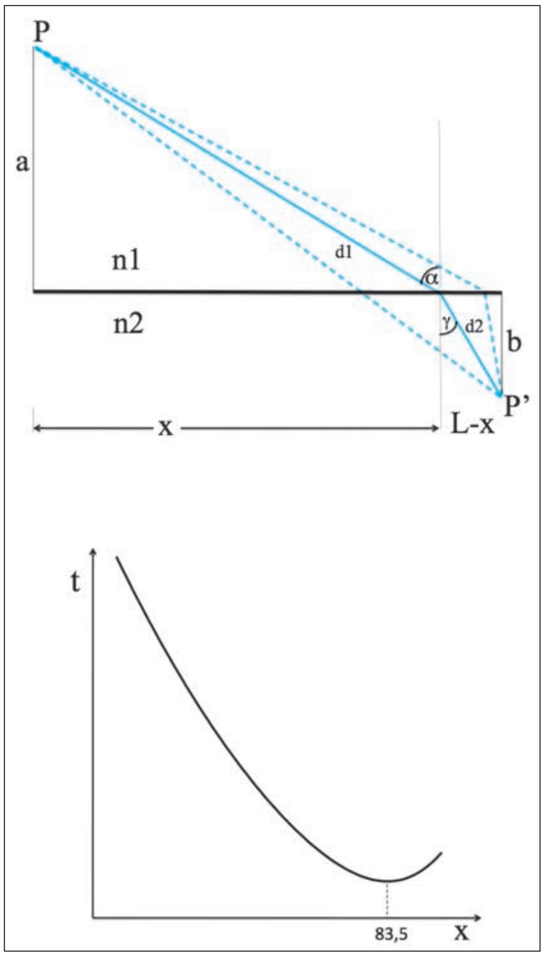

FIG. 4. *Nel pannello superiore sono raffigurate (in azzurro) diverse traiettorie a disposizione di un raggio luminoso che parte da P e raggiunge P' dopo essere stato rifratto attraversando una superficie lunga L = 100 cm. La traiettoria indicata dalla linea continua è quella effettivamente seguita dalla luce ed è tale per cui gli angoli α e γ, formati rispettivamente dal raggio incidente e da quello rifratto con la normale alla superficie, seguono la legge di Snell. Nel pannello inferiore è rappresentato il tempo di percorrenza delle varie traiettorie (linee azzurre nel pannello superiore) in funzione del punto di incidenza x. Il tragitto più veloce è quello con punto di incidenza x = 83,5 cm e corrisponde alla linea azzurra continua del pannello superiore.*

sultato è indipendente dagli specifici valori assunti per le costanti a, b, e L.

Consideriamo ora il comportamento del raggio rifratto. Il pannello superiore della FIG. *4 mostra diversi tragitti possibili che congiungono il punto P, posto in un mezzo con indice di rifrazione n_1, e il punto P', posto in un mezzo con indice di rifrazione n_2. Anche in questo caso i segmenti d_1 e d_2 sono dati, rispettivamente, dalle eqq. (2) e (3). Il tempo di percorrenza, invece, è ora dato da*

$$t = \frac{d_1}{\upsilon_1} + \frac{d_2}{\upsilon_2} = \frac{1}{c}\,(n_1\, d_1 + n_2\, d_2)\,.$$

*Come nel caso della riflessione, calcoliamo il tempo di percorrenza dei vari tragitti possibili in funzione di x utilizzando gli stessi valori di a, b e L adottati precedentemente. Assumiamo, inoltre, che il primo mezzo sia aria, con un indice di rifrazione $n_1 \approx 1$, e il secondo sia vetro, con un indice di rifrazione $n_2 = 1{,}5$. Anche in questo caso esiste una traiettoria, individuata dal valore $x = 83{,}5$, il cui tempo di percorrenza è il minore possibile (*FIG. *4). I corrispondenti valori dei seni dell'angolo di incidenza e di quello di rifrazione sono:*

$$\sin\alpha = \frac{x}{d_1} = 0,72,$$

$$\sin\gamma = \frac{L-x}{d_2} = 0,48,$$

da cui deriva

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1{,}5.$$

Quest'ultima relazione è proprio quella aspettata in base alla legge di Snell (eq. (1)). Abbiamo dunque mostrato che, anche nel caso della rifrazione, la luce segue il tragitto con il minor tempo di percorrenza.[5] *Come per la riflessione, questo risultato è indipendente dai valori assunti per le costanti a, b e L.*

[5] *Come nel caso della riflessione, anche per la rifrazione possiamo minimizzare il tempo di percorrenza ponendo pari a zero la sua derivata rispetto ad x. In questo caso abbiamo:*

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\left(\frac{n_1 x}{d_1} - \frac{n_2\,(L-x)}{d_2}\right) = \frac{1}{c}\,(n_1 \sin\alpha - n_2 \sin\gamma) \equiv 0.$$

Indipendentemente dalle costanti a, b e L, risulta evidente che il tragitto col minor tempo di percorrenza è proprio quello per cui è soddisfatta la legge di Snell.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF - Osservatorio Astronomico di Bologna, si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.