

Faraday e la relatività

Annibale D'Ercole

SCOPO di questa nota è riassumere brevemente alcuni elementi di elettrodinamica per chiarire la connessione tra elettricità e magnetismo e, soprattutto, per sottolineare come tale connessione sia collegata alla teoria della relatività (speciale).

Per fare questo ricordiamo prima alcuni concetti della fisica classica riguardanti particolarmente la meccanica:

- 1) viviamo in uno spazio assoluto,¹ una sorta di contenitore immobile indifferente alla materia in esso racchiusa e all'osservatore che analizza i movimenti di quest'ultima;
- 2) ha quindi senso parlare, ad esempio, di una navicella spaziale ferma o che attraversa questo spazio assoluto con una determinata velocità (rispetto allo spazio stesso);
- 3) le leggi della fisica (in particolare, le tre leggi di Newton) valgono nella navicella ferma e in qualsiasi altra navicella che si muova di moto rettilineo uniforme rispetto a questa. Pertanto, lo stesso esperimento condotto nelle diverse navicelle deve dare lo stesso risultato: in questo consiste la *relatività galileiana*;
- 4) le forze ricoprono un ruolo centrale nella fisica newtoniana: esse si distinguono in forze di contatto (come quando tiriamo un calcio a un pallone) e forze a distanza, come quella gravitazionale (ma anche elettrica e magnetica). Le forze a distanza sono più problematiche sia per la natura ignota che permette loro

* Questa rubrica – iniziata nel 1999 e che con questa puntata supera i novanta numeri – si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare a un pubblico non specialistico. Questi “fondamenti di astronomia”, volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del *Giornale di Astronomia*, <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

¹ Sull'esistenza o meno e sulle eventuali proprietà di uno spazio assoluto i fisici hanno discusso per secoli. Noi non possiamo approfondire qui la questione, ma ce ne siamo occupati nelle *Spigolature* del n. 3 del 2011.

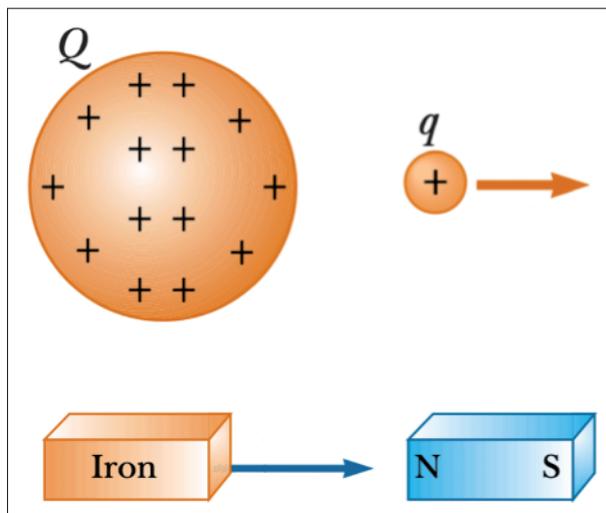


FIG. 1. Esempi di forza elettrica (con cui due cariche elettriche di ugual segno si respingono) e magnetica (con cui una calamita attrae il ferro). Per lungo tempo si è creduto che queste due forze fossero scollegate l'una dall'altra.

di agire da lontano (su questa misteriosa proprietà Newton si limitò a commentare: «*Hypotheses non fingo*»), sia perché implicano che i loro effetti si propagano istantaneamente.²

Passiamo ora a considerare i fenomeni elettrici e quelli magnetici. Per lungo tempo si è creduto che fossero indipendenti e separati tra loro (FIG. 1). Nel 1820, tuttavia, il fisico danese Hans Christian Ørsted (1777-1851) scoprì fortuitamente che un filo percorso da corrente è in grado di far ruotare l'ago di una bussola nelle sue vicinanze fino a posizionarlo ortogonalmente rispetto al filo stesso (FIG. 2). L'esperimento di Ørsted mostrò per la prima volta una connessione tra fenomeni elettrici e magnetici.

² Consideriamo, ad esempio, la forza gravitazionale che il Sole esercita (a distanza) sulla Terra. In un certo intervallo di tempo il nostro pianeta passa da una distanza d_1 a una distanza d_2 dal Sole risentendo di una variazione dell'attrazione che varia da $F_{g,1} \propto d_1^{-2}$ a $F_{g,2} \propto d_2^{-2}$. Ma come può il Sole conoscere *istantaneamente* la variazione di distanza della Terra in modo da adeguare *istantaneamente* e correttamente la forza $F_{g,2}$ alla nuova posizione? La sua forza a distanza deve necessariamente viaggiare a velocità infinita.

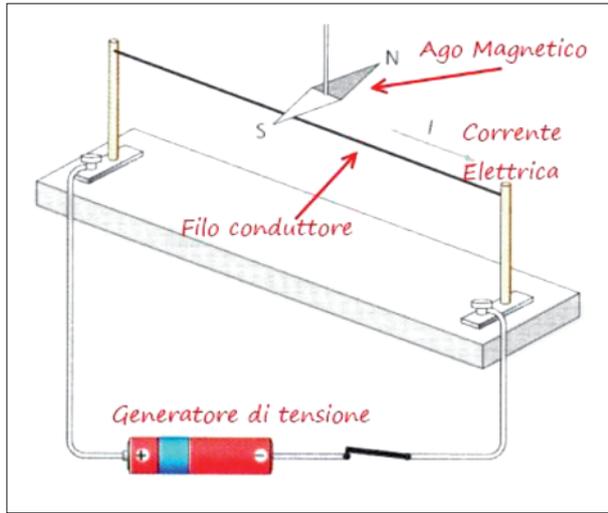


FIG. 2. L'esperienza di Ørsted. Le cariche elettriche (gli elettroni) in movimento lungo un filo conduttore producono una corrente che induce l'ago di una bussola a posizionarsi verticalmente rispetto al filo stesso.

Un ulteriore, significativo progresso venne compiuto nel 1831 dall'inglese Michael Faraday (1791-1867). Se una corrente elettrica, ossia una carica in movimento, è in grado di generare una forza magnetica, forse, in condizioni opportune, un magnete in movimento può produrre corrente elettrica. Al termine di svariati esperimenti (condotti con estrema perizia) Faraday dimostrò la veridicità di questa intuizione. Lo scienziato inglese diede un'interpretazione rivoluzionaria dei propri risultati e di quelli di Ørsted introducendo il concetto di *campo*. Quest'ultimo merita un qualche approfondimento al termine del quale descriveremo l'esperienza di Faraday.

Consideriamo, ad esempio, la visione classica della forza elettrostatica che si esercita a distanza tra le due cariche ferme Q e q in FIG. 1; se, ad esempio, togliamo q , la forza scompare e la presenza di Q non ha più nessuna influenza fisica (e potrebbe benissimo anche essere assente senza che nulla cambi). Faraday, però, rifiutava (insieme ad altri illustri pensatori tra cui, probabilmente, lo stesso Newton) l'idea di una forza a distanza con azione istantanea e avanzò un'ipotesi alternativa introducendo, come abbiamo detto, il concetto di *campo*. La carica elettrica Q produce uno specifico stato fisico dello spazio rappresentato dal *campo elettrico* \vec{E} che è presente in tutti i punti (e che può variare in funzione della posizione e del tempo) indipendentemente dal fatto che nella regione circostante vi siano o meno altri corpi (la freccia sopra il simbolo \vec{E} sta ad indicare che il campo è di tipo vettoriale).³ Se introduciamo

³ Nel linguaggio quotidiano siamo abituati a utilizzare il concetto di campo grazie alle previsioni meteorologiche e ai telefonini. A tutti noi è capitato di vedere una mappa su cui è riportato, in ogni punto, il valore della temperatura T o della pressione P . Possiamo dunque parlare di campo termico o di campo barico. Dal momento che T e P sono grandezze scalari, il loro campo è detto "scalare". Una mappa delle velocità del vento associa a ogni punto

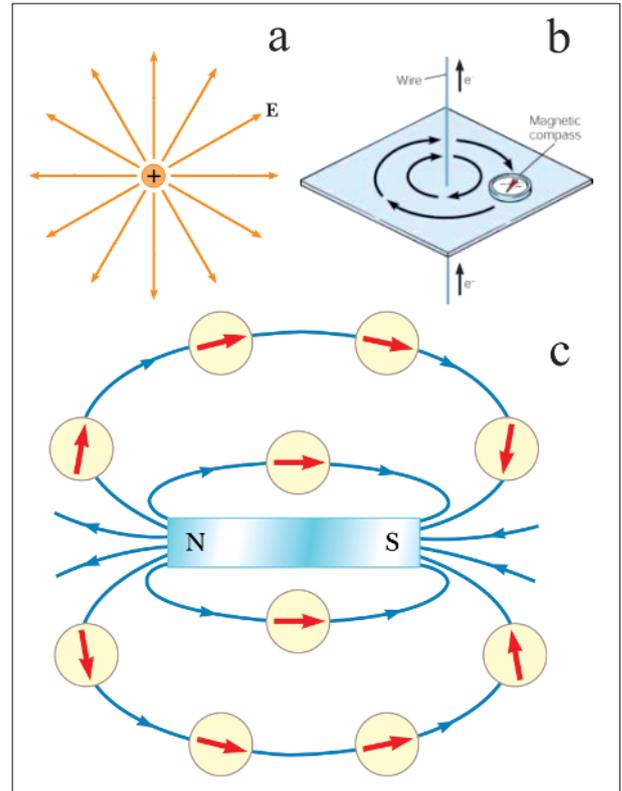


FIG. 3. Alcuni esempi di linee di campo di \vec{E} e \vec{B} caratterizzate dall'aver in ogni loro punto la forza del campo come tangente. a) Linee di una carica elettrica. Dal momento che in questo caso la forza elettrica è radiale, lo sono anche le linee di campo (la tangente a una retta in un punto coincide con la retta stessa). Due o più cariche elettriche disposte in punti diversi generano, con la combinazione delle loro forze, linee di campo curve e complesse. b) Un filo rettilineo percorso da corrente crea (in ogni suo punto) un campo magnetico con linee circolari concentriche, come testimoniato dall'ago della bussola tangente in un punto a una di tali linee. L'ago si dirige ortogonalmente al filo, come evidenziato dall'esperimento di Ørsted. c) Linee di campo magnetico di una calamita (le frecce rosse, tangenti alle linee, rappresentano schematicamente gli aghi di una bussola). In tutti i casi le linee "si addensano" vicino alle sorgenti (anche se nel pannello b risulta poco evidente) indicando una maggiore intensità del campo.

una particella "sonda"⁴ con carica q , il campo \vec{E} rappresenta l'agente fisico attraverso il quale Q arriva a esercitare su q una forza elettrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Sappiamo oggi che questa forza non può trasmettersi con velocità superiore alla velocità della luce $c = 3000.000 \text{ km/s}$ (si veda il livello avanzato).

Naturalmente, quel che abbiamo descritto per la forza elettrica vale anche per quella magnetica, gravitazionale, ed altre. Con questa interpretazione lo spazio cessa di essere "inerte", ossia indifferente a ciò che accade, ma acquista delle qualità – ossia i

una freccia indicante intensità, direzione e verso del vento stesso. Essendo la velocità un vettore, il campo delle velocità è detto "vettoriale". Infine, a volte può capitare che il nostro telefonino risulti isolato perché "non c'è campo" con riferimento, in questo caso, ai campi elettrici e magnetici delle onde elettromagnetiche.

⁴ Anche la carica q produce un proprio campo elettrico che va a interagire con quello di Q deformandolo (e viceversa). Se vogliamo studiare in dettaglio soltanto il campo \vec{E} generato da Q , è necessario l'utilizzo di una particella "sonda" con carica elettrica $q \ll Q$ in modo da "disturbare" trascurabilmente il campo di Q .

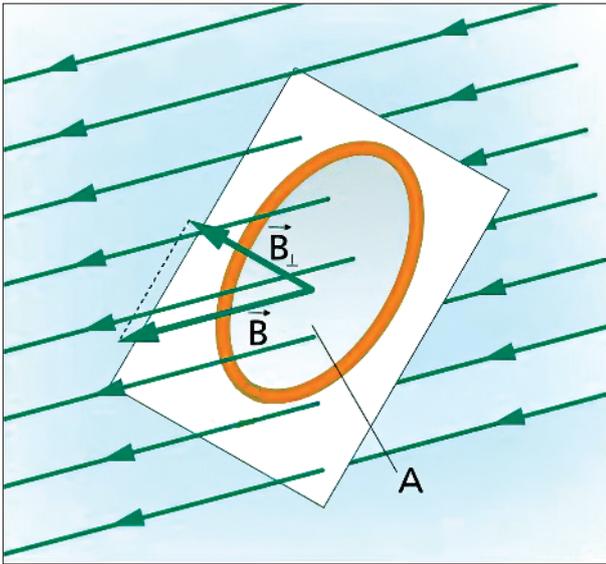


FIG. 4. Flusso $\Phi(\vec{B})$ del campo magnetico \vec{B} attraverso la superficie di area A delimitata da una spirale (arancione). Tale flusso è direttamente collegato al numero di linee di campo magnetico calcolato tenendo conto del valore della sola componente B_{\perp} ortogonale alla superficie: $\Phi(\vec{B}) = B_{\perp}A$.

campi – caratterizzati ognuno dalla *sorgente* che li genera (p.e., magnete per il campo magnetico, massa per quello gravitazionale). Inoltre, i campi vettoriali si caratterizzano per la presenza di *linee di campo* definite come curve ideali che hanno come tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso (FIG. 3); quanto più sono fitte le linee di campo in una regione, tanto più è intenso il campo in quella regione. Alle linee di campo è possibile associare il concetto di *flusso del campo* collegato al numero di linee che attraversano una certa superficie ideale. Nel caso di una superficie di area A attraversata da un campo magnetico uniforme di intensità B , il flusso è dato da $\Phi = B_{\perp}A$, dove B_{\perp} è il valore della componente di \vec{B} ortogonale alla superficie (FIG. 4).

Torniamo ora all'esperienza di Faraday. Egli mostrò che un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico nelle zone circostanti. Immaginiamo una calamita in movimento; a causa di tale movimento si verifica in ogni punto dello spazio una variazione del campo magnetico da lei prodotto e il conseguente insorgere di un campo elettrico indotto. La presenza di questo campo può essere evidenziata ponendo nelle vicinanze una *spira* (non necessariamente) circolare costituita da un filo conduttore. Se spira e calamita sono ferme non accade nulla di rilevante. Se invece avviciniamo la calamita alla spira si produce un aumento del flusso magnetico (attraverso l'immaginaria superficie delimitata dalla spira) che induce una corrente elettrica nella spira. Un allontanamento induce una corrente in senso opposto (FIG. 5). In sintesi, una variazione del flusso magnetico genera una forza elettromotrice (*fem*) dovuta a un campo elettrico indotto che muove gli elettroni di conduzione nella spira producendo la corrente elettrica. In questo

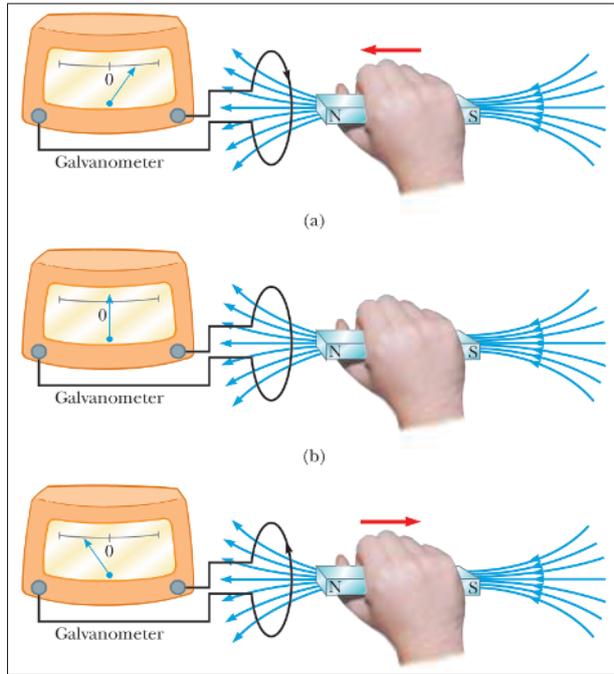


FIG. 5. L'esperienza di Faraday. Una spira è collegata a un galvanometro, uno strumento in grado di rilevare l'intensità e il verso di una corrente elettrica. La spira è attraversata dalle linee di campo magnetico di una calamita vicina. Se la calamita è ferma non accade nulla. Se invece la calamita si avvicina o si allontana, il flusso $\Phi(\vec{B})$ attraverso la spira aumenta o diminuisce inducendo una corrente in un verso o in quello opposto. Lo stesso risultato si ottiene se la calamita è ferma e a muoversi è la spira.

consiste la *legge di Faraday dell'induzione* che ci limitiamo a riportare senza entrare in dettaglio:

$$fem = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}, \quad (1)$$

dove $d\Phi(\vec{B})$ rappresenta la variazione di flusso nell'intervallo temporale dt : pertanto la *fem* non dipende solo da questa variazione, ma anche dalla rapidità con cui essa avviene.

Naturalmente, com'è facile verificare sperimentalmente, se la calamita rimane ferma e le avviciniamo la spira, si ottiene la stessa corrente (a parità di velocità di avvicinamento). Questa affermazione appare ovvia (abbiamo infatti utilizzato l'avverbio "naturalmente"), eppure contiene, sia pure ben nascosta, una subdola inconsistenza. Se la spira è ferma la corrente è dovuta alla *fem* prodotta dalla variazione del flusso di \vec{B} . Se invece è il magnete a essere fermo, \vec{B} è statico e non induce alcun campo elettrico in grado di far circolare corrente.⁵ Cos'è allora che spinge gli elettroni a formare una corrente? A questo punto è necessario introdurre la nozione di forza magnetica \vec{F}_B che agisce su una carica elettrica q in movimento con velocità \vec{v} attraverso un campo magnetico \vec{B} . Questa forza è data da:

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

⁵ È tacitamente inteso che i termini "fermo" e "in movimento" sono da intendersi rispetto allo spazio assoluto.

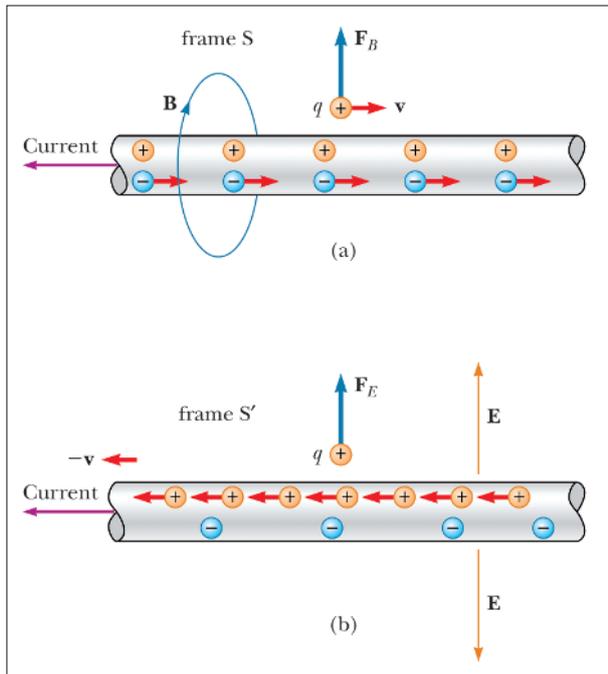


FIG. 6. a) La figura rappresenta un filo fermo (in un riferimento S) al cui interno è presente una corrente elettrica dovuta agli elettroni che scorrono con velocità \vec{v} (per convenzione il verso della corrente è opposto a quello di \vec{v}) mentre le cariche positive sono ferme. Nell'insieme il filo è neutro. È presente pure una carica positiva esterna al filo che si muove anch'essa con velocità \vec{v} . Questa carica interagisce con il campo magnetico \vec{B} generato dalla corrente e subisce una forza \vec{F}_B [eq. (2)] che tende ad allontanarla. b) Per un osservatore posto in un sistema di riferimento S' che si muove con velocità \vec{v} gli elettroni sono fermi come pure la carica positiva esterna, mentre le cariche positive interne scorrono. La carica esterna, essendo ferma, non risente di alcuna forza magnetica [eq. (2)]. Per un effetto relativistico (vedi testo) la densità degli elettroni appare minore di quella delle cariche positive; il filo, dunque, non è più neutro e genera una forza elettrica che respinge la carica esterna.

Senza addentrarci nelle tecnicità di questa formula (si tratta di un *prodotto vettoriale*), a noi qui basta sottolineare – per quanto diremo in seguito – che una carica ferma in un campo magnetico (ossia $v = 0$) non subisce alcuna forza magnetica.

Possiamo ora rispondere alla domanda che ci siamo posti poco sopra. Gli elettroni nella spira in avvicinamento alla calamita si muovono attraverso il campo magnetico di questa e risentono pertanto di una forza magnetica \vec{F}_B che li spinge lungo la spira stessa formando, appunto, una corrente il cui verso e intensità sono gli stessi di quelli ottenuti nel caso precedente.

Dunque, dobbiamo concludere che l'origine di tale corrente deriva da processi fisici diversi a seconda che a muoversi sia la calamita [eq. (1)] o la spira [eq. (2)]. Secondo Einstein (1879-1955), questa asimmetria non ha senso. In realtà, la produzione di corrente in entrambi i riferimenti dipende dalla stessa causa, ossia il moto *relativo* tra spira e magnete. In altre parole, è sbagliato chiedersi se sia la spira o il magnete a muoversi “veramente”, ossia rispetto allo spazio assoluto (un concetto, quest'ultimo, che diventa superfluo e non verrà più evocato, ma si vedano le *Spigolature* del n. 3 del 2011). Einstein, dun-

que, estende ai fenomeni elettromagnetici il principio di relatività. Tuttavia, mentre nella relatività galileiana la velocità di un oggetto varia a seconda del riferimento da cui lo si osserva (si veda il livello avanzato), le osservazioni ci dicono che la velocità della luce c è sempre la stessa in tutti i riferimenti, quale che sia la loro velocità (si veda il livello avanzato). La costanza di c , però, è solo apparentemente in contraddizione con il principio di relatività. Per riconciliare questi due concetti è necessario ripensare le nozioni di spazio e di tempo e accogliere nuove e controintuitive caratteristiche ad essi connesse quali, tra le altre, la contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi (che tratteremo nel livello avanzato). Queste considerazioni portarono Einstein, ispirato dalla esperienza di Faraday,⁶ a formulare la teoria della relatività ristretta.

Concludiamo questo livello base descrivendo un esempio che illustra la connessione tra campo elettrico e magnetico e come tale connessione sia dovuta alla teoria della relatività.

Consideriamo un filo elettrico percorso da corrente e una carica positiva q esterna al filo osservati da due diversi sistemi di riferimento, S e S' . In S gli elettroni nel filo scorrono con velocità v e la carica q si muove anch'essa con la stessa velocità. La corrente produce linee di campo magnetico circolari attorno al filo. Pertanto la carica q è sottoposta a una forza F_B che tende ad allontanarla dal filo (FIG. 6a). Questa stessa carica, invece, non risente di alcuna forza elettrica in quanto il filo, nel suo insieme, è neutro per via dei nuclei atomici positivi.

Esaminiamo ora la situazione vista da S' che si muove con velocità $-v$, in cui q è ferma (FIG. 6b). Anche gli elettroni nel filo sono fermi, mentre le cariche positive scorrono producendo una corrente elettrica. Dal momento che la velocità di q è $v = 0$, la carica positiva non risente di alcuna forza magnetica [eq. (2)]. D'altra parte, se in S q è sottoposta a una forza che l'allontana dal filo, lo stesso deve accadere in S' . Per capire quale forza si origina in S' dobbiamo ricorrere alla relatività concentrandoci, in particolare, su una delle sue (tante) conseguenze: la contrazione delle lunghezze. Al momento utilizzeremo questo effetto in maniera acritica, ma nel livello avanzato ne daremo la dimostrazione.

Abbiamo detto che in S il filo è neutro, e pertanto la distanza tra gli elettroni deve essere uguale alla separazione tra le cariche positive in maniera che la densità di carica sia nulla. La situazione appare diversa in S' in cui, a causa della contrazione delle lunghezze, la distanza tra le cariche positive in moto appare minore e quella tra gli elettroni (che sono fermi) appare maggiore rispetto a S . Dunque, la densità di cariche positive risulta maggiore di quella delle cariche negative e in S' appare un campo elettrico che esercita su q una forza repulsiva. In conclu-

⁶ Significativamente, Einstein, nel suo studio di Berlino, teneva un ritratto di Faraday.

sione, quello che si mostra come un campo magnetico in S si trasforma in un campo elettrico in S' .

Come vedremo nel livello avanzato, gli effetti relativistici si cominciano a mostrare per velocità dell'ordine di $1/3$ di quella della luce, ossia $\sim 10^8$ m/s; d'altra parte, la velocità degli elettroni che danno luogo a una corrente elettrica in un filo conduttore è inferiore a 1 mm/s! Sembrerebbe dunque che in questo caso la relatività, pur se correttamente applicata, non debba portare ad alcun risultato concreto. In realtà, dato l'elevatissimo numero di elettroni di conduzione (10^{22} cm⁻³), è sufficiente il piccolissimo contributo di ciascuno di essi per ottenere un risultato significativo.

Consideriamo un vagone fermo sui binari e due osservatori: l'osservatore B è all'interno del vagone mentre l'osservatore A è all'esterno, fermo anch'egli rispetto ai binari. Immaginiamo ora che B lanci una palla da bowling lungo il vagone a una velocità, p.e., di 10 km/h; questa velocità risulterà la stessa anche per A. Se invece il vagone viaggia con una velocità costante pari, diciamo, a 100 km/h, A vede sfrecciare la palla a 110 km/h giacché alla velocità di quest'ultima rispetto al vagone si somma la velocità del vagone stesso. Al contrario, nulla cambia per l'osservatore B. Se non ci fossero gli scossoni del treno e se i finestrini fossero oscurati, egli non avrebbe modo di capire se il vagone si stia muovendo o meno, e la palla si allontana da lui sempre a 10 km/h. Dunque, nel caso del treno in moto, i due osservatori attribuiscono una velocità diversa alla palla. Supponiamo ora che, invece di una palla da bowling, B "lanci" un impulso luminoso con la sua torcia elettrica; questo impulso, come sappiamo, attraverserà il vagone alla velocità della luce c ($\cong 300.000$ km/s). Sorprendentemente, la stessa velocità vale anche per A. Infatti, in questo caso la velocità del treno non si somma a quella della luce. In generale, la velocità c è una costante della natura ed è sempre la stessa in qualunque sistema di riferimento.⁷

Vediamo ora, tramite un paio di esperimenti mentali (e uno reale), come l'invarianza della velocità della luce porti, tra i vari risultati della relatività, alla dilatazione dei tempi e alla contrazione delle lunghezze in sistemi di riferimento in moto uno rispetto all'altro. Supponiamo che l'osservatore B interno al vagone ponga sul pavimento un meccanismo che faccia partire un cronometro contemporaneamente all'emissione di un raggio luminoso diretto verticalmente verso il soffitto dove è posto

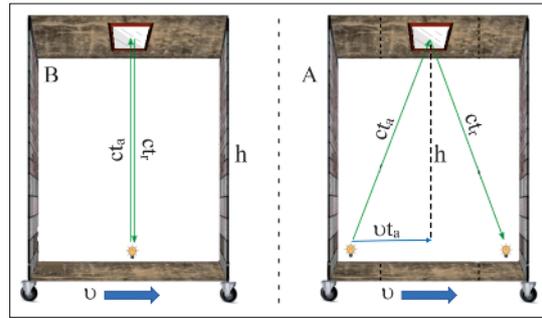


FIG. 7. Dilatazione dei tempi. Viene illustrato un vagone che viaggia con velocità v lungo i binari. Il pannello a sinistra mostra la situazione secondo l'osservatore B interno al vagone a cui il vagone stesso appare fermo. I raggi di andata e ritorno tra sorgente luminosa e specchio sono paralleli e impiegano lo stesso tempo di percorrenza per l'andata (t_a) e il ritorno (t_r). L'osservatore esterno e fermo a terra A (pannello a destra) vede muoversi il vagone con velocità v ; anche per questo osservatore i due tempi sono uguali tra loro, ma diversi da quelli misurati da B perché i raggi seguono traiettorie differenti. Dall'analisi del triangolo rettangolo riportato in figura è possibile ricavare il valore di t_a ($e t_r$) misurato da A in funzione di v (si veda il testo).

uno specchio. Una volta riflesso verso il basso il raggio raggiunge il cronometro bloccandolo. Il tempo t_B segnato dal cronometro è dato dalla somma del tempo di andata t_a e quello di ritorno t_r , che sono uguali per ovvi motivi di simmetria e valgono ciascuno h/c , dove h è l'altezza del vagone. Pertanto (FIG. 7)

$$t_B = \frac{2h}{c}. \quad (3)$$

Anche l'osservatore esterno A assiste necessariamente allo stesso evento. Dal suo punto di vista, però, nel tempo t_a impiegato dal raggio per raggiungere lo specchio quest'ultimo si è spostato di una quantità vt_a . La traiettoria del raggio appare dunque obliqua, ed è possibile individuare un triangolo rettangolo (FIG. 7). Possiamo allora scrivere la seguente semplice serie di passaggi:⁸

$$\begin{aligned} c^2 t_a^2 - v^2 t_a^2 &= h^2 \\ c^2 t_a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= h^2 \\ t_a &= \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Tenuto conto dell'eq. (3) e del fatto che $t_r = t_a$ otteniamo

$$t_A = t_B \gamma, \quad (4)$$

⁷ Nel 1887 Albert Abraham Michelson e Edward Morley realizzarono un esperimento con cui si dimostrava che la luce ha la stessa velocità sia che si muova nello stesso verso del moto terrestre, sia in verso opposto. Nel 1907 Michelson fu insignito del premio Nobel in Fisica diventando il primo statunitense a vincere tale premio in campo scientifico.

⁸ Per quanto detto in precedenza, anche per l'osservatore A la luce ha la stessa velocità c misurata da B, e questo giustifica i passaggi matematici che portano all'eq. (4). Se applicassimo le regole della meccanica classica dovremmo comporre la velocità della luce con quella del treno in modo di avere $c' = \sqrt{c^2 + v^2}$. È banale verificare che in questo caso i passaggi matematici di cui sopra porterebbero all'ovvia (per la fisica classica) uguaglianza $t_A = t_B$.

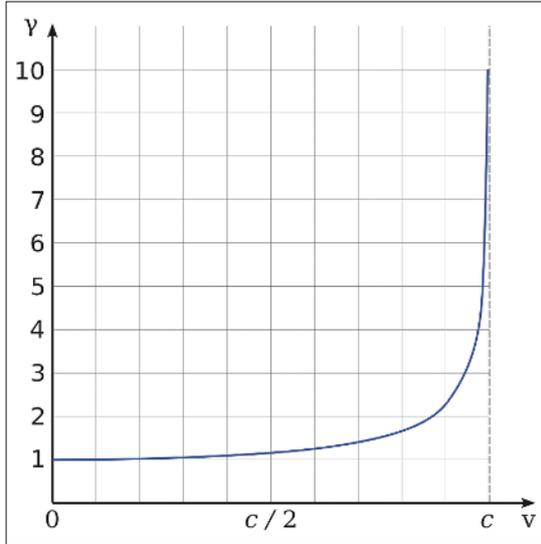


FIG. 8. Andamento con la velocità del fattore di Lorentz, $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-0.5}$. Fino a velocità di circa $0,3 c$ si ha $\gamma \approx 1$ e gli effetti relativistici sono trascurabili. Al contrario, per velocità vicine a quella della luce γ cresce a dismisura.

dove, per concisione, abbiamo introdotto il simbolo $\gamma \equiv [1 - (v/c)^2]^{-0.5}$ detto fattore di Lorentz.

Come si può vedere dalla FIG. (8), fino a velocità dell'ordine di $0,3 c$ abbiamo $\gamma \sim 1$ e t_A e t_B sostanzialmente coincidono. Nella vita quotidiana non sperimentiamo mai velocità così elevate (un aeroplano di linea viaggia con una velocità $\sim 10^{-6} c$) e questo spiega perché i nostri orologi sono tutti sincronizzati indipendentemente dalle velocità relative degli uni rispetto agli altri. Tuttavia, non è inusuale imbattersi in velocità relativistiche (ossia non trascurabili rispetto a c) in campi come, p.e., quelli delle particelle elementari o dell'astrofisica.⁹

Veniamo ora alla contrazione delle lunghezze. L'osservatore B all'interno del vagone apporta una modifica al suo apparato sperimentale: la sorgente luminosa e il cronometro vengono posti sulla parete di coda mentre lo specchio su quella di testa (FIG. 9). Se L_B è la lunghezza del vagone, si avrà $t_a = L_B/c$. Come nel caso precedente, abbiamo $t_a = t_r$ e il cronometro si blocca al tempo

$$t_B = \frac{2L_B}{c}. \quad (5)$$

Per l'osservatore esterno A la situazione è un poco più complicata. Il raggio diretto verso lo specchio "fatica" un poco a raggiungerlo perché quest'ultimo "scappa" con velocità v . La velocità relativa tra

⁹ Tuttavia la relatività influenza comunque la nostra quotidianità. Ad esempio, come abbiamo discusso nelle *Spigolature* del n. 1 del 2023, la relatività è cruciale nel permettere un'altissima sincronizzazione degli orologi atomici a bordo dei circa 31 satelliti del sistema GPS che orbitano attorno alla Terra. L'elevata sincronizzazione è necessaria per consentire localizzazioni con un errore dell'ordine del metro.

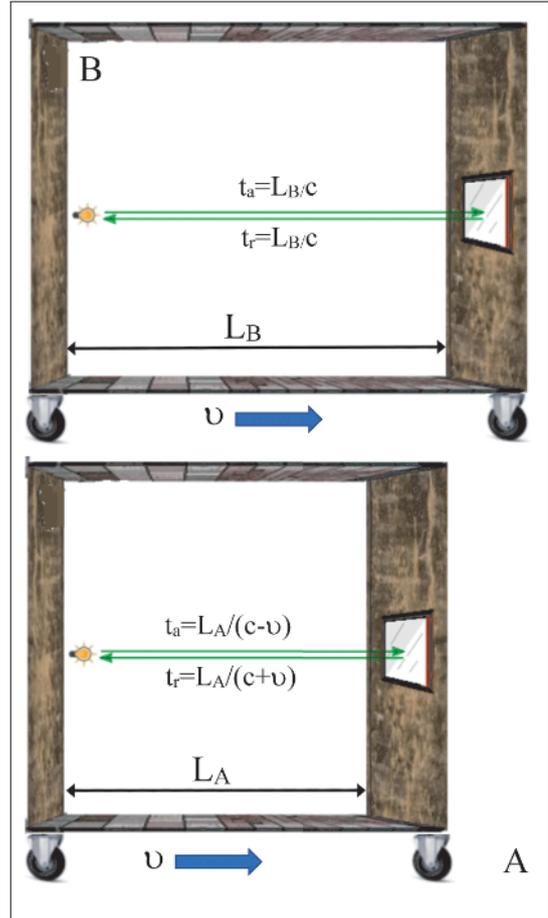


FIG. 9. Contrazione delle lunghezze. Nel pannello superiore è illustrata la situazione secondo l'osservatore interno B. La lunghezza L_B è quella del vagone "fermo". I raggi di andata e ritorno tra sorgente luminosa e specchio sono paralleli e impiegano lo stesso tempo di percorrenza per l'andata (t_a) e il ritorno (t_r). I due tempi sono invece diversi se misurati dall'osservatore esterno A (pannello inferiore) che vede sfrecciare il vagone. Per questo osservatore il vagone ha una lunghezza $L_A = L_B/\gamma$ (si veda il testo).

raggio e specchio è dunque $c - v$ e $t_a = L_A/(c - v)$, dove L_A è la lunghezza del vagone secondo l'osservatore A. Il raggio riflesso è invece facilitato nel raggiungere il cronometro perché la parete di coda gli si muove incontro; la velocità relativa è $c + v$ e quindi $t_r = L_A/(c + v)$. Il tempo totale è $t_A = t_a + t_r$, ossia

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{L_A}{c - v} + \frac{L_A}{c + v} = \frac{2L_A c}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{2L_A c}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2L_A}{c} \gamma^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Combinando le eqq. (4), (5) e (6) possiamo scrivere

$$\frac{2L_A}{c} \gamma^2 = \frac{2L_B}{c} \gamma$$

da cui otteniamo infine

$$L_A = \frac{L_B}{\gamma}. \quad (7)$$

In conclusione, quando il vagone è fermo la sua lunghezza è pari a L_B per entrambi gli osservatori. Se il vagone è in movimento, la sua lunghezza appare ridotta di un fattore $1/\gamma$ all'osservatore A. È importante sottolineare che a contrarsi sono solo le lunghezze parallele al moto, mentre quelle ortogonali rimangono inalterate. In altre parole, il vagone in moto appare più corto, ma la sua larghezza e la sua altezza non cambiano (questo, tra l'altro, giustifica il fatto che gli osservatori A e B utilizzano lo stesso valore h per giungere all'eq. (4)).

È interessante descrivere una verifica (tra le tante) della relatività ottenuta dal conteggio dei muoni, particelle in tutto simili agli elettroni ma con una massa circa 200 volte superiore. Il muone è instabile e ha un tempo di vita proprio (ossia misurato in un sistema di riferimento in cui è fermo o si muove lentamente) $\tau_p = 2,2 \mu s (= 2,2 \times 10^{-6} s)$. Questo significa che se abbiamo un gruppo coevo di N muoni, dopo un tempo τ_p metà di essi decade in altre particelle; dopo $2 \tau_p$ la metà dei muoni rimanente si dimezza ulteriormente e ne rimangono $N/4$, e così via. La Terra è continuamente bombardata da raggi cosmici estremamente energetici¹⁰ (composti al 90% da protoni). Questi raggi cosmici, interagendo con l'alta atmosfera, producono svariate particelle dirette verso la superficie terrestre, tra cui i muoni. L'esperimento consiste nel misurare il flusso di muoni in alta montagna e calcolare poi quanti di essi raggiungono il livello del mare. I muoni viaggiano a una velocità di $v = 0,99 c$ e quindi, durante un tempo τ_p potrebbero percorrere solo 653 m; al livello del mare si osserverebbero molti meno muoni di quelli effettivamente rilevati perché una frazione significativa decadrebbe in volo. Questa contraddizione è risolta grazie all'eq. (4). Per un osservatore a terra il tempo di vita del muone è pari a $\tau = \tau_p \gamma = 15,6 \mu s$ (tenendo conto che $\gamma = 7,1$) e la distanza media percorsa è dunque $v \tau_p \gamma \approx 4633 m$ (FIG. 10b).

¹⁰ I raggi cosmici pervadono l'intera Galassia e sono generati da fenomeni altamente energetici quali le esplosioni di supernovae (ma non solo).

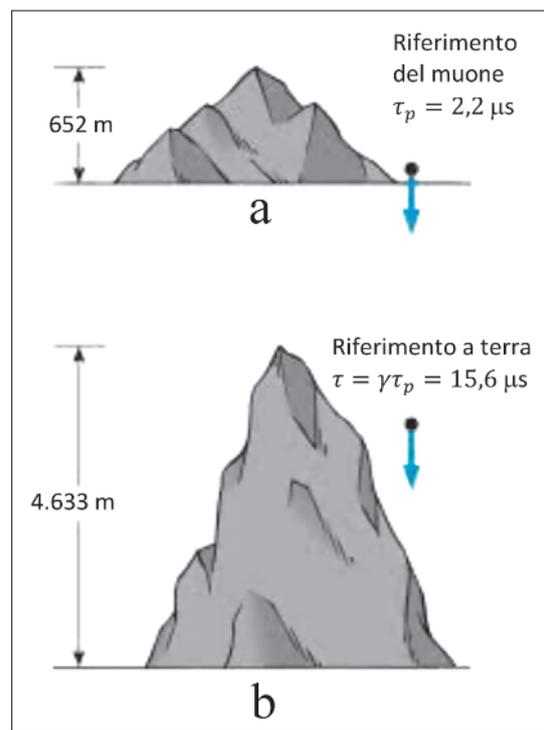


FIG. 10. a) Muoni che si muovono al 99% della velocità della luce “vedono” davanti a sé una distanza molto contratta e raggiungono terra nonostante il breve tempo a disposizione prima di decadere. b) Per un osservatore a terra la distanza da percorrere da parte del muone è molto maggiore, ma anche il tempo di vita della particella è dilatato, e il muone riesce ugualmente ad arrivare a terra. In ultima analisi, i due sistemi di riferimento si equivalgono (come devono) in termini di risultato finale.

È istruttivo capire lo stesso problema “dal punto di vista” del muone. Il cronometro “al polso” della particella misura un tempo non dilatato, pertanto quando arriverà a segnare un tempo inferiore, diciamo, a $3 \tau_p$ ($6,6 \mu s$) il muone probabilmente decadrà. Tuttavia esso potrebbe comunque giungere a terra perché la distanza da percorrere si contrae [eq. (7)] e può essere coperta nel breve tempo a disposizione (FIG. 10a).

Annibale D’Ercole si è laureato in Fisica all’Università di Roma “La Sapienza”. Astronomo associato presso l’INAF - Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.