

Il paradosso di Parrondo e i motori browniani

Annibale D'Ercole

CHE relazione c'è tra una noce brasiliana, lo scia-bordio delle onde che giungono sulla spiaggia e il conto di un ristorante? La risposta è data dal cosiddetto *paradosso di Parrondo*. Per capire di cosa si tratta cominciamo col descrivere gli esempi appena elencati.

Immaginiamo un secchiello pieno di sabbia frammentata in maniera uniforme a ghiaia composta da pietrisco di varie dimensioni. Se agitiamo rapidamente il secchiello in modo da farlo "vibrare", noteremo che la sabbia tende a scendere in basso e la ghiaia a disporsi in alto, col pietrisco di maggiori dimensioni collocato in cima. Questo risultato è controintuitivo in quanto ci aspetteremmo che la breccia, più pesante, si depositi sul fondo. La spiegazione è meno banale di quanto si possa pensare. Molto semplicemente, qui ci limitiamo a dire che ad ogni scuotimento i granelli di sabbia scivolano attorno ai sassolini depositandosi sotto di essi e spostandoli in alto.

Questo fenomeno va sotto il nome di *segregazione granulare*, ma è anche noto agli addetti ai lavori come *effetto della noce brasiliana* perché, se agitiamo una confezione di frutta secca mista, le noci brasiliane, più grandi, tendono a spostarsi in alto (FIG. 1a).

Consideriamo ora il fenomeno della *deriva litorale*. Se il moto ondoso del mare è ortogonale alla battigia, la sabbia viene mossa avanti e indietro rispettivamente dalle onde in arrivo e dal loro riflusso. In questo caso, dunque, non vi è un trasporto netto di materiale su larga scala. Le cose cambiano se il fronte ondoso forma un angolo con il litorale. Assumia-

mo, ad esempio, che la spiaggia sia rivolta verso sud mentre le onde giungono dalla direzione sud-est (FIG. 1b). In questo caso la sabbia e le eventuali conchiglie presenti tendono ad un movimento netto verso il lato ovest del bagnasciuga. Infatti le onde provengono da sud-est ma il riflusso si verifica in direzione sud, provocando uno spostamento a "dente di sega" del materiale.

E veniamo al più stravagante degli esempi elencati più sopra. È possibile che il gestore di un ristorante sbagli un conto per eccesso (il cui totale, cioè, è superiore a quello corretto) o per difetto. Tuttavia, è assai probabile che il cliente tenda a non fare alcuna rimostranza se il conto è sottostimato, mentre pretenderà il ricalcolo nel caso opposto. Pertanto, sebbene il numero dei conti sbagliati per difetto e per eccesso si equivalgano statisticamente, questi ultimi verranno corretti in misura molto maggiore.

Quello che lega tra loro questi esempi, pur così diversi, è il ruolo dell'*asimmetria*. Se il secchiello contenesse solo sabbia (o comunque oggetti tutti con stessa dimensione), se il fronte ondoso fosse parallelo alla spiaggia e se i clienti non fossero opportunisti, le fluttuazioni statistiche dovute allo scuotimento del secchiello, all'alternarsi delle onde e all'errore di calcolo dei conti non porterebbero ad alcun risultato netto. Tuttavia, la presenza di asimmetrie (mescolanza di oggetti di diverse dimensioni, esistenza di un angolo tra fronte ondoso e litorale, e opportunismo dei clienti) produce un risultato tangibile (sedimentazione nel secchiello, trasporto netto di materiale sulla spiaggia, differenziazione tra conti sbagliati per eccesso e per difetto).

Dal momento, dunque, che l'asimmetria gioca un ruolo così importante e pervasivo, c'è da chiedersi se questo sia dovuto al caso, o piuttosto abbia un significato più profondo che coinvolge le leggi stesse della natura. Una possibile risposta a questo interrogativo è stata proposta nel 1996 dal fisico spagnolo Juan Manuel Rodriguez Parrondo (1964-) dell'Università di Madrid, ed è appunto nota in letteratura come il *paradosso di Parrondo* (benché l'autore preferisca definire i suoi risultati controintuitivi piuttosto che paradossali).

* Questa rubrica (giunta alla sua 81ª puntata) si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

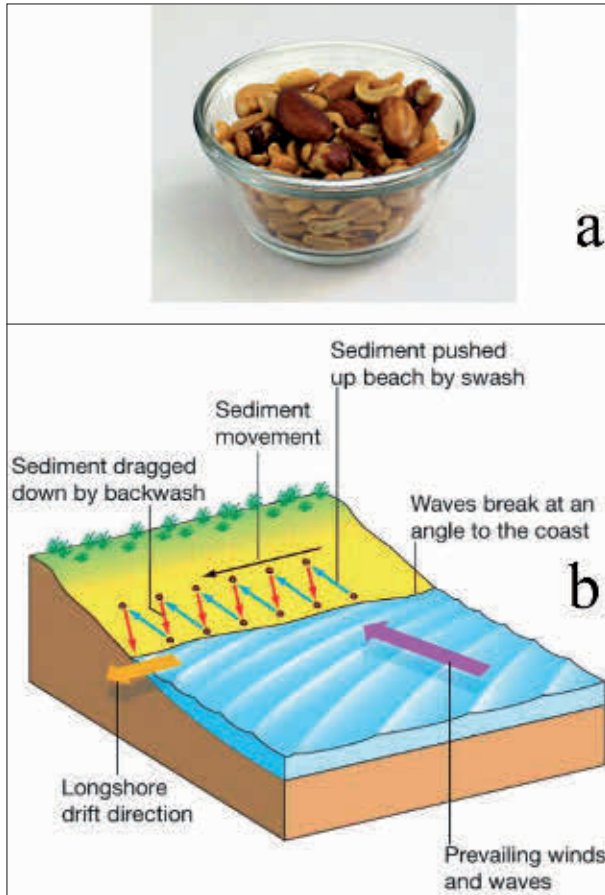


FIG. 1. a) Se un contenitore di frutta secca mista viene scosso ripetutamente, le noci brasiliane –più grandi– salgono “in superficie”. b) Illustrazione della deriva litorale. Le onde, nel loro moto in direzione obliqua rispetto al litorale (freccia viola), risalgono il bagnasciuga trascinando con sé sabbia e ghiaia (freccie azzurre). Durante la risacca l’acqua e il materiale trascinato tendono ad indietreggiare in maniera diretta a causa della gravità (freccie rosse). Si verifica così un trasporto di materiale a zig-zag lungo il litorale (freccia gialla).

In verità, Parrondo ha preso spunto da un meccanismo fisico – che tradurremo liberamente qui come *barriera intermittente* (*flashing ratchet* in inglese) – già conosciuto dai fisici, sebbene nessuno lo avesse mai analizzato dall’originale prospettiva del fisico spagnolo. Successivamente, ispirato da questo meccanismo, Parrondo ha formalizzato il paradosso nell’ambito della Teoria dei giochi, fornendogli una valenza generale. Il paradosso può essere enunciato come segue:

data una coppia di giochi che, presi singolarmente, abbiano un’alta probabilità di risultare perdenti, è possibile elaborare una strategia vincente puntando su di essi alternativamente.

Nel livello avanzato discuteremo del gioco originale ideato da Parrondo e del suo collegamento con la barriera intermittente. In questo livello base ci concentreremo, invece, solo su quest’ultima. Consideriamo per semplicità uno spazio unidimensionale (ossia un segmento) lungo cui si possono muovere delle biglie, e supponiamo di poter sollevare a comando una barriera (come il MOSE a Venezia) con un profilo a denti di sega *asimmetrici* (FIG. 2a). Inizial-

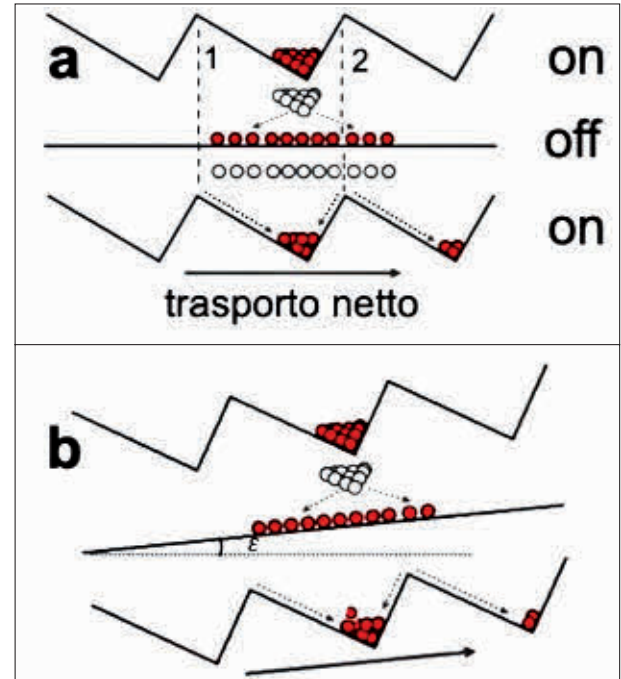


FIG. 2. Funzionamento di una barriera intermittente. a) Inizialmente, con la barriera sollevata (ON), le biglie sono intrappolate all’interno di un singolo avvallamento; quando la barriera si abbassa (OFF) le biglie tendono a sparpagliarsi in entrambe le direzioni isotropicamente lungo il segmento orizzontale. Se la barriera viene alzata nuovamente dopo un tempo sufficientemente breve, alcune biglie avranno superato la (ideale) linea tratteggiata 2 quando nessuna ha ancora superato la linea tratteggiata 1; le prime si collegheranno nell’avvallamento a destra di quello di partenza, mentre tutte le altre ricadranno indietro nella posizione originale. Ripetendo più volte l’alternanza ON / OFF è possibile muovere tutte le biglie verso destra. Questo trasporto netto (che si oppone alla diffusione isotropica) è dunque dovuto all’asimmetria dei denti di sega. b) Tale trasporto si può realizzare anche in presenza di una forza che agisca in direzione opposta, come avverrebbe se, per esempio, il segmento fosse inclinato verso sinistra (con un angolo ϵ) e le biglie fossero sottoposte all’azione della forza di gravità lungo questa direzione.

mente la barriera è sollevata e le biglie sono tutte ammassate all’interno di un singolo avvallamento. Abbassando rapidamente la barriera le biglie sono libere di sparpagliarsi in ambedue le direzioni, tendendo a raggiungere entrambe l’estremità del segmento. Se però solleviamo di nuovo la barriera dopo un tempo sufficientemente breve, risulta evidente dalla figura che – data l’asimmetria dei denti – le biglie dirette verso sinistra rimarranno ancora intrappolate nell’avvallamento iniziale, mentre alcune di quelle dirette verso destra saranno riuscite a posizionarsi nell’avvallamento adiacente (FIG. 2a). Ripetendo questo meccanismo più volte otteniamo un trasporto netto delle biglie anche in assenza di una forza esterna che le spinga verso destra lungo il segmento. Anzi, è addirittura possibile che le biglie vengano trasportate in direzione opposta a quella di una forza eventualmente presente (FIG. 2b). Naturalmente l’energia necessaria per il trasporto deriva dall’energia utilizzata per sollevare la barriera.

Possiamo intendere il meccanismo appena descritto come una sorta di gioco in cui si vince se le biglie si accumulano a destra. Sia il “gioco” ON (FIG.

Scenario	Sorgente di casualità	Asimmetria
Paradosso della noce brasiliana	Scuotimento del contenitore	Dimensioni delle particelle
Deriva litorale	Frangimento delle onde sulla costa	Angolo tra litorale e onde
Conto del ristorante	Errore del gestore	Rimostranze del cliente
Preservazione del raccolto*	Presenza di passeri e insetti	Numero di passeri e insetti
Barriera intermittente	Moto isotropo delle biglie	Profilo dei denti della barriera
Metabolismo cellulare	Moto browniano	Potenziale elettrico/chimico

* Si veda il livello avanzato.

TABELLA. Le prime quattro righe riassumono esempi del *paradosso di Parrondo* nella quotidianità. La penultima riga si riferisce al meccanismo che illustra il funzionamento del paradosso. L'ultima riga concerne un'applicazione del paradosso in campo biologico.

2), in cui le biglie rimangono localizzate in un avvallamento della barriera, sia il "gioco" OFF, in cui le biglie si sparpagliano o scivolano verso sinistra (FIG. 2b), sono entrambi perdenti; ma una opportuna combinazione dei due ripetuta nel tempo si trasforma, come indicato da Parrondo, in una strategia vincente.

La TABELLA riassume gli esempi discussi più sopra e ne evidenzia le analogie. In ognuno di essi sussiste una sorgente generatrice di eventi casuali che tuttavia – come già sottolineato in precedenza – danno luogo a un risultato "netto" grazie alla presenza di un'asimmetria. Questo meccanismo così generale ha fatto sì che il paradosso di Parrondo abbia valicato i confini della Teoria dei giochi nel cui ambito è stato formulato, e sia stato preso in considerazione anche in altri campi.

Diversi studi, ad esempio, sembrano evidenziarne un ruolo importante nel funzionamento dei sistemi viventi. Questi sono composti da cellule, singole unità delimitate da una membrana e contenenti il citoplasma, un fluido in cui si trovano proteine e organelli. Il metabolismo cellulare richiede che le proteine siano in grado di muoversi con moto diretto per lunghi tratti (lunghi se paragonati alle dimensioni dell'oggetto che si muove). Il movimento è in genere indotto da differenze di potenziali elettrici o chimici. È necessario tuttavia sottolineare che per una proteina spostarsi in maniera deterministica attraverso il citoplasma è tanto difficile quanto per una nave procedere nel mezzo di un uragano, a causa del moto di agitazione termico delle molecole d'acqua del citoplasma. Il rapporto tra la massa di una molecola d'acqua e quella di una piccola proteina è paragonabile a quella tra un chicco di grandine e un'automobile. Tuttavia, le molecole urtano la proteina miliardi di volte al secondo provocando il fenomeno del *moto browniano*,¹ ossia comunicandole un moto erratico. Non sempre le

forze elettriche e/o chimiche sono sufficientemente intense da contrastare un tale moto disordinato e sospingere la proteina lungo una direzione precisa. Studi sia teorici che pratici mostrano che in questo caso la natura potrebbe ricorrere al meccanismo della barriera intermittente. Infatti, questo meccanismo permette di "raddrizzare" il moto browniano per ottenere un movimento della proteina in una direzione ben definita.

Si consideri il dispositivo illustrato in FIG. 3a, realizzabile con le attuali nanotecnologie. Questo dispositivo crea un potenziale elettrico (spazialmente) periodico a dente di sega asimmetrico (FIG. 3c) che può essere spento (OFF) e acceso (ON) alternativamente. Analogamente all'esempio delle biglie, una particella² carica elettricamente che sia intrappolata in questo potenziale si muoverà verso destra a seguito di un'opportuna sequenza di ON e OFF benché, anche nel caso ON, il campo elettrico medio sia nullo lungo la direzione x . Una piccola proteina potrebbe coprire in un secondo la distanza di un micrometro ($1 \mu\text{m} = 10^{-4} \text{cm}$), circa dieci volte le sue dimensioni: questo equivale a un'automobile che si muove a 100 km/h. Naturalmente, i sistemi biologici non possiedono un simile dispositivo tecnologico, ma sono comunque in grado di produrre potenziali come quello descritto tramite concatenazione lineare di *dipoli* formati ad esempio da *monomeri*³ che si aggregano in *polimeri* lineari estesi (FIG. 3b). Questi lunghi filamenti rappresentano una sorta di binario lungo cui uno ione può muoversi in maniera diretta tramite il meccanismo ON/OFF.

Brown e spiegato nel 1905 da Albert Einstein in termini di urti che queste particelle ricevono da parte delle molecole d'acqua a causa del moto di agitazione termica di quest'ultime.

² Qui per particella si intende una molecola, anche relativamente complessa, che sia piccola rispetto al periodo spaziale L del potenziale (FIG. 3c).

³ Un monomero è una molecola che costituisce l'unità di base per i polimeri, che sono i mattoni delle proteine. Esistono addensamenti di carica negativa in una zona della molecola, e conseguente insorgere di carica positiva nella zona opposta: si viene così a creare un dipolo elettrico. La sequenza di dipoli lungo un polimero produce l'andamento del potenziale elettrico schematizzato in FIG. 3c.

¹ Per moto Browniano si intende il moto disordinato (osservabile al microscopio) di piccole particelle dell'ordine del micrometro ($1 \mu\text{m} = 10^{-4} \text{cm}$) presenti in un fluido. Il fenomeno è stato scoperto agli inizi dell'Ottocento dal botanico scozzese Robert

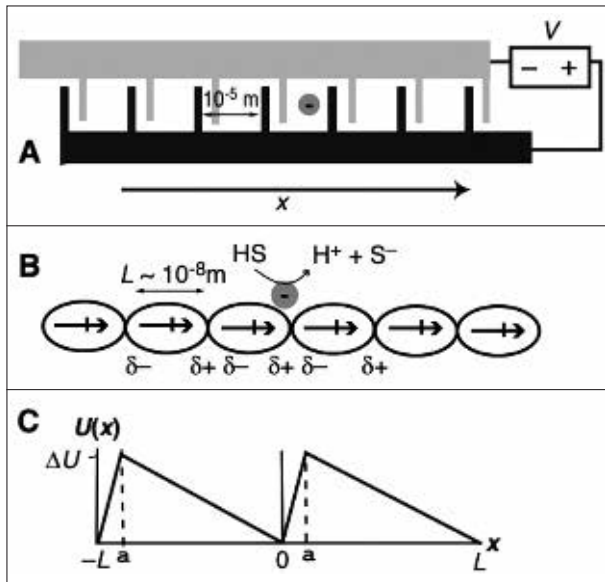


FIG. 3. Realizzazione pratica di un potenziale elettrico a dente di sega su scala cellulare. a) Applicando un voltaggio V ad elettrodi disposti asimmetricamente (negativi quelli grigi, positivi quelli neri) si ottiene un potenziale periodico ma anisotropo come illustrato nel pannello c). Il potenziale può essere "acceso" o "spento" tramite un interruttore. Una particella carica negativamente tende a muoversi lungo l'asse x "scivolando in basso" (verso destra o verso sinistra) lungo il profilo di U fino a collocarsi nel punto di minimo tra i due denti adiacenti. Tuttavia, accendendo e spegnendo opportunamente il potenziale, la particella si muoverà verso destra benché il valor medio del campo elettrico sia nullo lungo l'asse x (il lavoro ΔU necessario per spostare una particella lungo il tratto $(-L, a)$ è uguale e contrario a quello necessario per spostarla lungo il tratto $(a, 0)$). b) Il potenziale illustrato nel pannello c) può essere realizzato da una catena di dipoli formati da monomeri allineati "testa-coda" (si veda il testo), come segnalato dai simboli $\delta+$ e $\delta-$ indicanti l'eccesso di carica locale dei singoli monomeri.

In realtà, l'interazione tra la proteina in movimento e il potenziale periodico è alquanto complessa e ancora non interamente compresa in termini di processi biochimici. Ne tracciamo qui, a grandi linee, un possibile meccanismo di base.

Inizialmente la proteina aderisce al polimero in un avvallamento del potenziale. Qui si attiva una reazione chimica che provoca un cambiamento conformazionale della proteina a seguito del quale la proteina stessa non risente più del potenziale e si sgancia dal polimero tornando "libera" e muovendosi "avanti e indietro" per via del moto browniano dell'ambiente. In questa fase la proteina attiva nel citoplasma circostante una reazione chimica che la riporta alla conformazione iniziale e viene di nuovo attratta verso il polimero. A causa dell'asimmetria del potenziale, la proteina, "ricadendo" sul polimero, tende statisticamente a collocarsi più a destra rispetto alla posizione iniziale perché è più probabile che incappi nel lato lungo del dente di sega. Questo ciclo si ripete circa 100 volte in un secondo. Pertanto la proteina non scorre lungo il polimero come un vagono sulle rotaie, ma procede per salti. Alcuni salti possono anche avvenire "all'indietro", ma i salti "in avanti" sono più probabili dando luogo al moto sostanzialmente unidirezionale della proteina (questo meccanismo è stato proposto per spiegare il movi-

mento della miosina lungo i filamenti di actina che provoca la contrazione muscolare). Contrariamente all'esempio illustrato in FIG. 2, la barriera non oscilla, ma è la particella che alterna due modalità diverse. Tuttavia, questo è inessenziale ai fini del significato e del meccanismo del paradosso di Parrondo.

Sottolineiamo di nuovo che, come nel caso delle biglie, il moto direzionale di una particella avviene non *nonostante* il moto termico disordinato cui è soggetta, ma *grazie* ad esso. Nella condizione OFF le particelle si diffondono in tutte le direzioni. Nella successiva posizione ON il potenziale anisotropo convoglia parte del moto casuale in una direzione ben precisa. Questo procedimento è caratteristico di una categoria di meccanismi (a livello microscopico) detti *motori browniani* il cui prototipo è dato dal motore di Smoluchowsky-Feynman che abbiamo analizzato nel numero scorso. La loro caratteristica è quella di sfruttare i moti disordinati delle molecole, favorendo quelli che spingono nella direzione desiderata e bloccando l'effetto degli altri. Tali motori, introducendo un moto ordinato, sembrerebbero contraddire il secondo principio della termodinamica che stabilisce che i sistemi fisici evolvono passando a configurazioni sempre più disordinate.⁴ In realtà questa contraddizione è solo apparente. Della relazione tra motori browniani, secondo principio della termodinamica e impossibilità di moti perpetui (dovuta proprio al secondo principio) ci siamo occupati nel numero scorso.

Il possibile ruolo del paradosso di Parrondo viene attivamente indagato anche in altri campi quali la fisica, l'elettronica, la finanza, la genetica delle popolazioni e le dinamiche sociali. Si consideri, ad esempio, una popolazione di virus con due diverse dinamiche: in entrambe la popolazione è destinata a sparire, mentre un'alternanza delle due – che potrebbe originarsi, per esempio, da variazioni stagionali – produce un'impennata nella crescita della popolazione stessa.

Abbiamo sottolineato nel livello base come il paradosso di Parrondo sia stato formalizzato nell'ambito della Teoria dei giochi. Esso stabilisce che esistono coppie di giochi, ognuno con una maggiore probabilità di perdere che di vincere, con cui è possibile costruire una strategia vincente puntando su di essi in modo alternato.

Un esempio assai semplice è il seguente. Consideriamo due giochi, A e B, con le seguenti regole. Nel gioco A lo scommettitore perde 1 euro ogni volta che gioca. Nel gioco B il giocatore vince 3 euro se il capitale che possiede al momento della scommessa è pari, altrimenti perde 5 euro. Immaginiamo di partire da un capitale iniziale di 100 €. Se lo scommettitore punta esclusivamente su uno dei due gio-

⁴ Le molecole di profumo all'interno di una boccetta aperta si diffondono in tutta la stanza, mentre non accade il contrario.

chi è destinato a perdere il suo capitale dopo 100 puntate in entrambi i casi. Ma se alterna i due giochi secondo la sequenza BABABA ..., è facile verificare che vincerà 2 € ogni due puntate.

Benché il risultato sia sorprendente, vale la pena sottolineare che, sia pure inconsapevolmente, non è inusuale imbattersi nel paradosso di Parrondo nella vita quotidiana. Possiamo citare il gioco degli scacchi in cui una mossa perdente che porti al sacrificio di un pezzo a volte si rende necessaria per conquistare la vittoria. E come sanno bene i contadini, sia i passerai che gli insetti possono rovinare il raccolto, ma una combinazione di entrambi può preservarlo.⁵

Veniamo ora ad un secondo esempio – un poco più complicato – esposto originariamente proprio da Parrondo ispirandosi alla barriera intermittente. Consideriamo di nuovo due diversi giochi, A e B. Inoltre, per comodità, definiamo C_t il capitale in possesso del giocatore al tempo t , prima della puntata. Se il giocatore vince guadagna 1 €, e il suo capitale diventa $C_{t+1} = C_t + 1$, altrimenti perde 1 €, e il suo capitale diventa⁶ $C_{t+1} = C_t - 1$. Il gioco A consiste nel classico lancio della moneta scommettendo sull'uscita di "testa" (che definiamo evento 1). Per il nostro gioco, però, noi utilizziamo una moneta truccata⁷ (moneta 1) in maniera che risulti $P_A = 0,5 - \epsilon$, dove ϵ è un numero molto piccolo, per esempio $\epsilon = 0,005$. Chiaramente, alla lunga, lo scommettitore che gioca soltanto al gioco A è destinato a perdere tutto il suo capitale.

Nel gioco B è necessario verificare innanzitutto se il capitale a disposizione è un multiplo di un qualche intero M che, per semplicità, possiamo assumere essere pari a 3 (anche se, in verità, il suo valore esatto non ha importanza). In questo caso lanciamo la moneta truccata 2; in caso contrario lanciamo la moneta truccata 3 (FIG. 4a). Questo significa che, mediamente, la moneta 3 viene lanciata un poco più spesso della moneta 2 (perché è più probabile che il capitale non sia un multiplo di 3). Se assegniamo una scarsa probabilità di vittoria (cioè dell'uscita di "testa") alla moneta 2 – per esempio $P_2 = 0,1 - \epsilon$, questa alla lunga prevarrà sulla maggiore frequenza della moneta 3, anche se ad essa assegniamo una probabilità di vittoria maggiore, per esempio $P_3 = 0,75 - \epsilon$. Si può dimostrare che, dopo molti lanci, la probabilità di vitto-

⁵ Nel 1958, in Cina, furono mobilitati i contadini per sterminare i passerai del paese, accusati di mangiare il raccolto. La strage dei passerai diede purtroppo l'effetto opposto a quello sperato perché le cavallette ed altri insetti furono liberi di devastare i raccolti provocando (insieme ad altre concause) una carestia che determinò decine di milioni di morti.

⁶ Il tempo t è inteso come discreto e indica il tempo in cui avviene la giocata. Il tempo $t + 1$ indica il tempo della giocata successiva.

⁷ Possiamo immaginare di limare lo spessore della moneta in modo da fornirle un profilo a tronco di cono piuttosto che cilindrico. Questo riduce la superficie di una delle due facce, riducendone la probabilità di uscita.

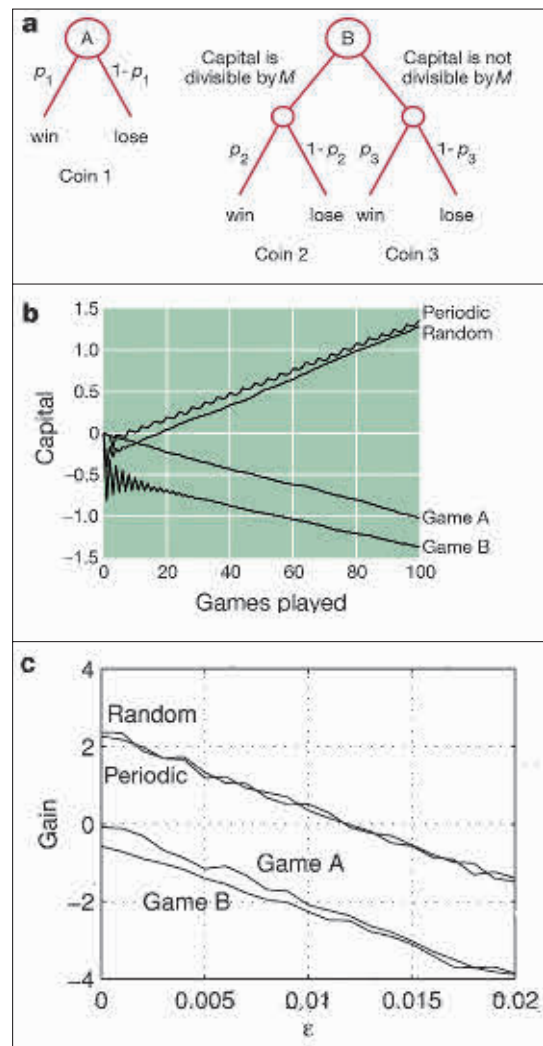


FIG. 4. a) Esempio di due giochi basati su tre monete truccate che dimostra il paradosso di Parrondo. P_1 , P_2 e P_3 rappresentano le probabilità di vittoria delle singole monete. Assumendo per questi tre parametri i valori dati nel testo (in cui $P_1 \equiv P_A$), i giochi A e B presi singolarmente sono entrambi perdenti. b) Le due linee discendenti illustrano l'andamento del capitale in funzione del numero di giocate se si scommette solo sul gioco A oppure solo sul gioco B (quest'ultimo mostra oscillazioni iniziali dovute al legame con $M \equiv 3$ che tuttavia si smorzano all'aumentare delle giocate). Il paradosso consiste nel fatto che, alternando il gioco A e il gioco B, si può ottenere una strategia vincente. La linea crescente leggermente ondulata è stata ottenuta giocando secondo la sequenza AABBAABB ...; l'altra linea crescente deriva da una successione casuale dei due giochi. Questi risultati sono stati ottenuti al computer mediando su 50.000 simulazioni, nell'ipotesi $M \equiv 3$. c) Andamento del guadagno in funzione del valore di ϵ . Per $\epsilon = 0$ i giochi A e B sono entrambi alla pari, ma diventano perdenti per $\epsilon > 0$. La combinazione dei due giochi, invece, risulta vincente per $\epsilon \leq 0,012$, e perdente per valori maggiori.

ria è pari a⁸ $P_B = 0,5 - 0,87\epsilon$, e il gioco B risulta perdente al pari del gioco A. Tuttavia, alternando

⁸ Calcoli (non banali) mostrano che, con i parametri adottati nel testo, si ha che le probabilità di usare le monete 2 e 3 sono, rispettivamente, $0,38 - 0,2\epsilon$ e $1 - (0,38 - 0,2\epsilon) = 0,62 + 0,2\epsilon$. Dunque la probabilità di vittoria delle monete 2 e 3 sono, rispettivamente, $(0,38 - 0,2\epsilon)(0,1 - \epsilon)$ e $(0,62 + 0,2\epsilon)(0,75 - \epsilon)$. La somma di queste due probabilità fornisce la probabilità di vittoria del gioco B pari a $P_R = 0,5 - 0,874\epsilon$.

i giochi secondo la sequenza AABBAABB... si ottiene una strategia vincente⁹ (FIG. 4b).

Come mostrato in FIG. 4c, ϵ è un parametro di controllo introdotto per verificare – assegnandogli valori diversi – come varia l'andamento del gioco al variare di P_A e P_B . Dalle espressioni di queste due probabilità si capisce che, per $\epsilon = 0$ i giochi A e B sono “alla pari”, ossia le probabilità di vittoria e di sconfitta sono uguali, e dopo numerosi lanci il capitale del giocatore rimane sostanzialmente inalterato (a parte qualche piccola variazione per difetto o per eccesso dovuta alle fluttuazioni statistiche).

È interessante sottolineare il ruolo di ϵ , specialmente nel parallelismo tra il gioco di Parrondo e il meccanismo della barriera intermittente che abbiamo discusso nel livello base (e che approfondiamo più sotto). La FIG. 4c mostra come, per valori eccessivi di questo parametro ($\epsilon = 0,013$), anche l'alternanza dei giochi risulta perdente. Analogamente, quando l'angolo di inclinazione della barriera (che non a caso abbiamo indicato con lo stesso simbolo in FIG. 2b) è sufficientemente grande, le biglie sono comunque destinate a scivolare in basso, e il “gioco”, se così si può dire, diventa perdente.

Il paradosso di Parrondo è collegato al meccanismo della barriera intermittente assai più strettamente di quanto non appaia dal ruolo di ϵ appena discusso. È proprio questo collegamento ad aver attratto l'attenzione di studiosi di diverse discipline, e vale dunque la pena di approfondirlo, sia pure parzialmente.

Assimiliamo il capitale C_t alla posizione di una particella browniana lungo un “reticolo” unidimensionale – ossia una retta dove solo alcuni punti equidistanti possono essere occupati (FIG. 5). L'aumento del capitale corrisponde ad uno spostamento della particella verso destra (e viceversa).

Il gioco A, per $\epsilon = 0$, rappresenta la discretizzazione della libera diffusione, ossia la possibilità di muoversi casualmente ed indifferentemente verso destra o verso sinistra (posizione OFF della barriera in FIG. 2). Infatti, adottando la sequenza suggerita da Parrondo (AABBAABB...), giocando due volte A si ottengono tre possibili risultati: il capitale rimane inalterato ($C_{t+2} = C_t$), oppure $C_{t+2} = C_t \pm 2$ (in altre parole, la particella rimane al suo posto oppure si sposta di due passi verso destra o verso sinistra).

Il gioco B, invece, simula il moto di una particella sotto l'azione di un potenziale asimmetrico a

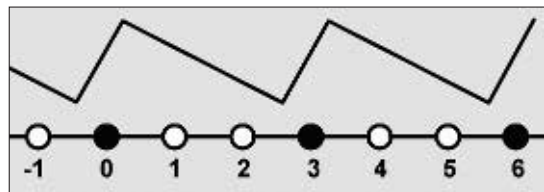


FIG. 5. Illustrazione in termini di spostamento casuale di una particella sottoposta ad un potenziale a dente di sega secondo le regole del gioco B di Parrondo. La moneta 2 (punti neri) ricopre il ruolo della forza negativa a corto raggio, mentre la moneta 3 (punti bianchi consecutivi) è l'analogo della forza positiva a lungo raggio.

forma di sega. La FIG. 5 mostra la rappresentazione spaziale del gioco B (con una sequenza di terne di posizioni, avendo scelto $M = 3$) da paragonare con questo potenziale. Quando la particella è su un disco nero (multiplo di 3), si utilizza la moneta 2 la cui probabilità di vittoria P_2 è molto bassa, e quindi è assai facile che la particella si muova verso sinistra. Al contrario, la maggiore probabilità di movimento da un disco bianco è verso destra, perché in questo caso utilizziamo la moneta 3 che ha un'alta probabilità di vittoria P_3 . Il potenziale a dente di sega ha un breve intervallo spaziale in cui produce una forza negativa, e un intervallo più lungo che genera una forza positiva.¹⁰ Similmente, il gioco B utilizza la moneta 2 su un piccolo intervallo (cioè un disco ogni tre del reticolo), e la moneta 3 su un lungo intervallo composto dai due dischi bianchi consecutivi che non sono multipli di tre. Proprio questa asimmetria genera il trasporto della particella. Questo trasporto non avviene con continuità e senza “intoppi”. Il lettore volenteroso può verificare che, dopo alcune giocate la particella (il capitale) può ritrovarsi al punto di partenza, o può addirittura recedere (diminuire); tuttavia dopo un congruo numero di alternanze tra i giochi A e B (alternanze ON/OFF del potenziale) la particella tende a muoversi verso destra (il capitale è destinato a crescere).

Riassumendo, il gioco A simula il moto browniano della particella che si muove erraticamente avanti e indietro. Il gioco B “rettifica” le fluttuazioni del moto della particella dovute ai due turni del gioco A imprimendole (statisticamente) un moto direzionale. È evidente la similitudine con il funzionamento della barriera intermittente, e più ancora, con il meccanismo proposto per la mobilità di una proteina lungo un polimero, entrambi descritti nel livello base.

⁹ Non tutte le sequenze si equivalgono. Per esempio, la sequenza ABABA... è perdente mentre la sequenza ABBABB... è vincente. Quello che cambia tra sequenze vincenti è la loro efficienza, ossia la rapidità con cui cresce il capitale al crescere dei lanci.

¹⁰ Com'è noto, una forza (conservativa) è data dalla derivata del potenziale: $F = -dU/dx$. Le pendenze opposte dei due lati del dente di sega del potenziale generano pertanto forze di segno opposto.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma “La Sapienza”. Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.