

# Spigolature astronomiche\*

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS)

## Solvay 1930. Bohr vs Einstein: 1-0

Annibale D'Ercole

ALBERT EINSTEIN (1879-1955) affermava spesso che Dio non gioca a dadi, esprimendo in tal modo il suo disappunto verso la meccanica quantistica basata su considerazioni statistiche, e in una di queste occasioni pare che Niels Bohr (1885-1962) abbia risposto al collega: «Smettila di dire a Dio cosa deve fare!».

Questo aneddoto esemplifica perfettamente il diverso approccio che questi due giganti della fisica (legati peraltro da sincera amicizia e grandissima stima) avevano riguardo l'epistemologia della scienza. Per anni Einstein si ingegnò nell'ideare esperimenti mentali (*Gedankenexperiment*, in tedesco) atti a mostrare, secondo lui, l'inconsistenza di una fisica basata su concetti probabilistici, ma puntualmente Bohr li smontava evidenziandone l'inconsistenza. Il più famoso di questi confronti – dovuto sia alla sottigliezza degli argomenti che, come vedremo, al coinvolgimento emotivo (soprattutto di Bohr) – è senza dubbio quello che si verificò durante il sesto Congresso Solvay tenutosi a Bruxelles nel 1930. Prima di descrivere quel che accadde in quell'occasione, tuttavia, è necessario fare qualche passo indietro per chiarire alcuni concetti basilari atti a comprendere i termini del “duello” che si svolse in quell'anno.

Attorno all'inizio del xx secolo venne scoperto l'effetto fotoelettrico: quando una lastra metallica è investita da radiazione emette elettroni. In effetti, nei conduttori di elettricità (come i metalli, appunto) gli elettroni, in parte, si muovono liberamente (non

sono, cioè, legati ad un particolare nucleo atomico) e, se colpiti da radiazione sufficientemente energetica, vengono “sbalzati fuori”. Dunque, l'effetto in sé è alquanto intuitivo, ma le modalità con cui si realizza si rivelarono del tutto inaspettate. Senza entrare nei dettagli (all'effetto fotoelettrico abbiamo dedicato le *Spigolature* nel n. 2 del 2001), diremo qui che, sulla base della teoria ondulatoria della luce, secondo cui la radiazione è composta da oscillazioni di campi elettrici e magnetici, i fisici si aspettavano che la velocità degli elettroni espulsi aumentasse con l'ampiezza delle onde (ossia con l'intensità del fascio luminoso), e il loro numero crescesse all'aumentare della frequenza di tali onde. Invece, in contrasto con le previsioni, gli esperimenti mostravano l'esatto contrario.

Per spiegare questo strano comportamento, nel 1905 Einstein ipotizzò che la luce a volte si comporta come se fosse composta da particelle di energia elettromagnetica, a cui venne successivamente dato il nome di *fotoni*. L'energia  $E$  di un singolo fotone dipende dalla sua frequenza  $\nu$  e si può scrivere come  $E = h\nu$ , dove  $h = 6,63 \times 10^{-27}$  erg·s è la costante di Planck. Il fotone possiede anche un impulso (quantità di moto) pari a  $p = E/c$ , dove  $c = 300.000$  km/s è la velocità della luce.<sup>1</sup>

Benché “calibrata” sull'effetto fotoelettrico, l'ipotesi dei fotoni si è rivelata efficace anche in altri fenomeni, come l'effetto Compton o l'irraggiamento da parte di atomi eccitati (quando i loro elettroni decadono su orbite con livelli energetici inferiori). Questo dualismo onda/particella, secondo cui la radiazione si comporta a volte come onda (p.e. nei fenomeni di diffrazione, si veda la FIG. 2) e a volte come corpuscolo, non fu accettato subito da tutta la comunità scientifica, e quando nel 1921 ad Einstein venne assegnato il premio Nobel per la sua interpretazione dell'effetto fotoelettrico (e non per la sua

\* Questa rubrica si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi “fondamenti di astronomia”, volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

<sup>1</sup> Questa formula non è dissimile a quella che vale per una particella materiale di massa  $m$  e velocità  $v$ , e dotata quindi di impulso  $p = mv$  ed energia  $E = 0,5mv^2$ , per la quale possiamo scrivere  $p = 2E/v$ .

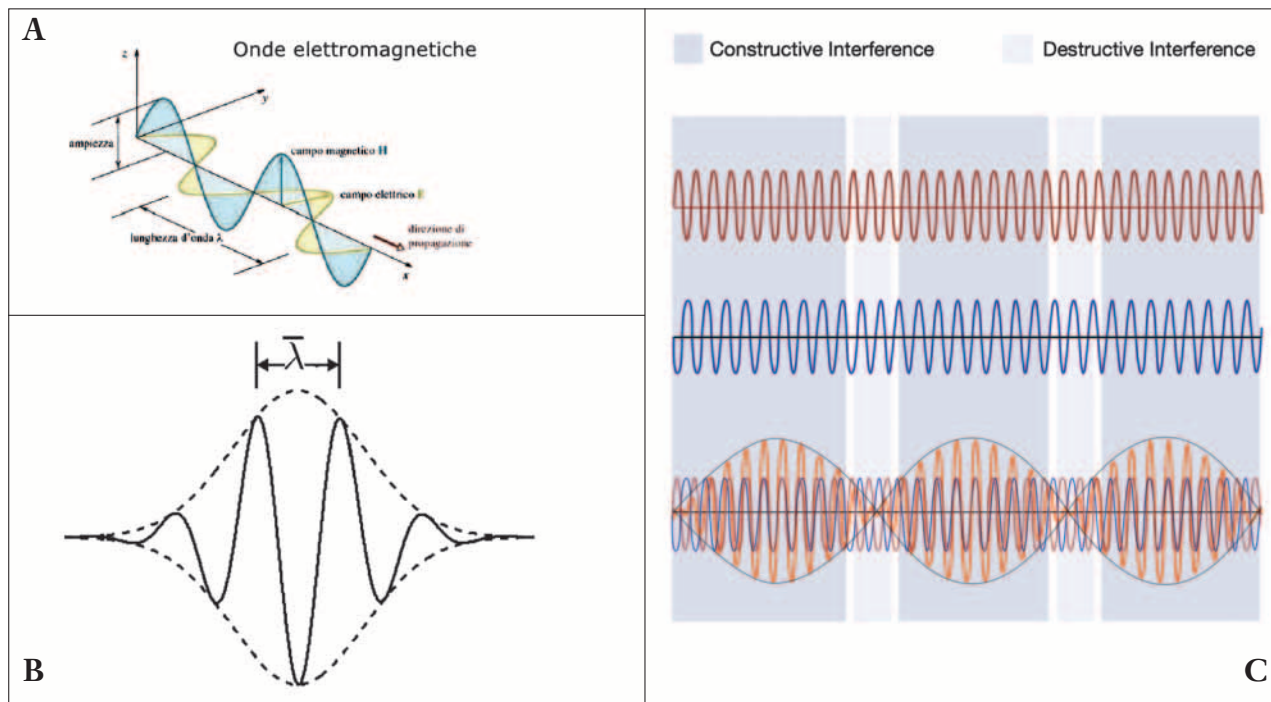


FIG. 1. Classicamente, un fronte luminoso è rappresentato da oscillazioni del campo elettrico e di quello magnetico connesse tra loro che viaggiano alla velocità della luce  $c = 300.000 \text{ km/s}$ . Un caso semplice è rappresentato da un raggio monocromatico (ossia composto da oscillazioni di un'unica lunghezza d'onda  $\lambda$ ) che si estende nello spazio, come quello raffigurato nel pannello A dove è mostrato come il campo elettrico e quello magnetico oscillino su piani ortogonali. Il pannello C mostra il caso idealizzato di una sorgente che emette due onde sinusoidali (rossa e blu) di uguale ampiezza ma con lunghezze d'onda leggermente diverse (per semplicità vengono riprodotte le oscillazioni del solo campo elettrico). Il risultato complessivo è dato dalla somma (interferenza) delle due oscillazioni (curva arancione) che presenta massimi e minimi nei punti in cui coincidono i massimi e i minimi delle due curve (interferenza costruttiva), mentre là dove il massimo di una interferisce col minimo dell'altra l'ampiezza risultante (arancione) è nulla (interferenza distruttiva). La radiazione è dunque rappresentata da una sequenza di "pacchetti" evidenziati dalle due ampie sinusoidi verdi. Questo andamento sinusoidale così semplice è in realtà alquanto idealizzato perché presuppone che la sorgente luminosa sia mantenuta accesa sin da un lontano passato. Supponiamo invece il caso opposto di una sorgente che rimanga accesa per un tempo brevissimo come, ad esempio, un atomo eccitato il cui elettrone decade da un livello energetico superiore a uno inferiore emettendo radiazione in un centomillesimo di secondo ( $10^{-8} \text{ s}$ ). In questo caso, le oscillazioni del campo elettrico della radiazione emessa sono schematizzate nel pannello B: esse sono assenti a grandi valori di  $x$  perché la radiazione non vi è ancora giunta, ma sono assenti anche "alle spalle" dell'impulso luminoso perché nessuna radiazione è stata emessa successivamente. Dunque, tale impulso è descritto da un unico pacchetto d'onda come quello illustrato, composto da una serie di sinusoidi di differenti lunghezze d'onda che si sommano e le cui diverse ampiezze interferiscono distruttivamente ovunque tranne che nella ristretta regione dove è localizzato l'impulso luminoso. In genere le diverse frequenze delle onde che compongono il pacchetto sono simili ed è quindi possibile definire una frequenza media  $\bar{\nu}$  (e una lunghezza d'onda media  $\bar{\lambda}$ ) caratterizzante il pacchetto stesso. Questo risultato deriva dall'elettromagnetismo classico, ed è quanto di più simile può essere associato al concetto di fotone, una particella limitata nello spazio ma caratterizzata da grandezze ondulatorie come  $\lambda$  e  $\nu$ . In meccanica quantistica risulta che tutta la radiazione (non solo quella emessa da sorgenti "istantanee", ma anche quella che si estende nello spazio come, per esempio, un raggio luminoso) sia composta da fotoni.

teoria della relatività, come si potrebbe credere) alcuni fisici ritennero che fosse un errore.<sup>2</sup>

Un ulteriore capitolo nella storia che andiamo raccontando venne scritto nel 1927 da Werner Heisenberg con l'enunciazione del celebre *principio di*

<sup>2</sup> La visione ondulatoria della luce rappresenta il limite della meccanica quantistica per piccoli trasferimenti di impulso ed energia, e grandi quantità di fotoni. Quest'ultima condizione è visivamente associabile a una vasta distesa di sabbia (il campo elettromagnetico) in cui l'individualità dei singoli granelli (i fotoni) è trascurabile. Per esempio, una lampadina di 100 Watt emette nel visibile circa  $10^{20}$  fotoni al secondo, giustificando una descrizione ondulatoria continua della sua radiazione. Passiamo ora alla condizione sull'impulso di un singolo fotone (pari, come sappiamo, a  $p = h\nu/c = h/\lambda$ ). Assumendo  $\lambda = 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$  (la lunghezza d'onda della luce verde), otteniamo  $p = 1,22 \times 10^{-22} \text{ g}\cdot\text{cm/s}$ . Se consideriamo l'interazione con un elettrone, la cui massa a riposo è  $m_e = 9,11 \times 10^{-28} \text{ g}$ , otteniamo  $p \ll m_e c$ ; in questo caso è lecito utilizzare la descrizione classica. Invece, nel caso in cui  $p \geq m_e c$ , per una corretta descrizione dell'interazione si deve necessariamente ricorrere all'aspetto particellare della radiazione (p.e. nell'effetto Compton).

*indeterminazione*. Immaginiamo di voler ricostruire la traiettoria di una palla da biliardo di massa  $m$  che si muova sul tavolo verde irradiandola con una serie di "flash" che ci permettono di fotografarla nell'istante in cui è illuminata. La sequenza delle posizioni rilevate su una lastra fotografica al momento dei flash permette di tracciare la traiettoria della palla, mentre la misura del tempo trascorso nel passaggio da una di queste posizioni alla successiva consente di valutare la velocità  $v$ , e di conseguenza l'impulso  $p = mv$ , nel tratto tra le due posizioni. Siamo pertanto in grado di misurare contemporaneamente sia la posizione che l'impulso della palla. Questo è possibile perché i fotoni che urtano la palla trasmettono a quest'ultima un impulso trascurabile che non ne altera in maniera significativa la velocità (e dunque neanche la traiettoria "originale").

Le cose però vanno diversamente se vogliamo misurare posizione ed impulso di una particella piccola come, ad esempio, un elettrone. In questo caso

l'impulso del fotone può essere sufficiente a modificare quello dell'elettrone durante l'urto con quest'ultimo. Per quanto piccole possano essere le singole modifiche, esse si sommano al ripetersi dei flash e la traiettoria dell'elettrone viene fortemente disturbata, discostandosi da quella che si sarebbe realizzata in assenza delle nostre osservazioni. Si potrebbe allora pensare di ovviare al problema utilizzando fotoni di frequenza (e dunque di impulso) molto inferiore, in modo da ridurre le perturbazioni a livelli trascurabili, ma in realtà il problema persisterebbe. Per le onde elettromagnetiche vale infatti la relazione  $\lambda = c/v$ ; pertanto, una riduzione di  $v$  porta ad un aumento di  $\lambda$ , un effetto non privo di conseguenze a causa della *diffrazione*. Questo fenomeno riguarda qualunque tipo di onde (marine, sonore, elettromagnetiche) ed è dovuto alla loro capacità di piegare attorno agli ostacoli.

Come mostrato in FIG. 2 la radiazione, una volta superato l'ostacolo, tende a "sparpagliarsi" formando un cono. L'angolo di apertura di questo cono è minimo se la lunghezza d'onda è molto piccola rispetto alla dimensione  $D$  dell'ostacolo, e cresce al crescere di  $\lambda$ . A titolo di esempio, la luce verde ha  $\lambda = 5 \times 10^{-5}$  cm mentre il diametro classico dell'elettrone è  $D = 5,62 \times 10^{-13}$  cm; è chiaro che lo "sparpagliamento" della radiazione è elevatissimo in questo caso, e rimane alto anche se ad illuminare l'elettrone fossero raggi X con  $\lambda = 10^{-10}$  cm. Pertanto, la luce proveniente dall'elettrone e raccolta dalla nostra strumentazione non viene focalizzata sulla lastra fotografica sotto forma di "un puntino", ma come una "chiazza" circolare assai più estesa. Il risultato, dopo diversi flash, è la presenza di chiazze diffuse su tutta la lastra fotografica dalle quali è impossibile risalire ad una linea che rappresenti la traiettoria. Invece, nel caso di una palla di biliardo del diametro  $D = 5$  cm la diffrazione non gioca alcun ruolo e la traiettoria può essere ricavata con elevata precisione.

Da quanto appena detto, l'impossibilità di misurare al contempo con precisione impulso e posizione di una particella non dipende dall'accuratezza del nostro apparato di misura, ma dalle leggi stesse della natura. Quest'impossibilità è, pertanto, ineludibile. Il meglio che si possa fare è realizzare un compromesso utilizzando fotoni con frequenza e lunghezza d'onda non eccessivamente alte. Questo porta alla condizione  $\Delta x \Delta p \approx h$ , nota come principio di indeterminazione, secondo cui minore è l'incertezza con cui misuriamo la posizione, maggiore è l'incertezza con cui conosciamo l'impulso, e viceversa.

Esiste una seconda forma del principio di indeterminazione che coinvolge l'incertezza in energia  $\Delta E$  e l'incertezza nel tempo  $\Delta t$ :  $\Delta E \Delta t \approx h$ . Questo significa che in un intervallo temporale  $\Delta t$  non è possibile misurare l'energia con precisione, ma soltanto con un'incertezza  $\Delta E$ . Per ridurre questa incertezza è necessario aumentare  $\Delta t$ . Quest'intervallo temporale può rappresentare il tempo necessario per realizzare la misura, oppure il tempo necessario per produrre il fenomeno<sup>3</sup> (p.es. il tempo impiegato da

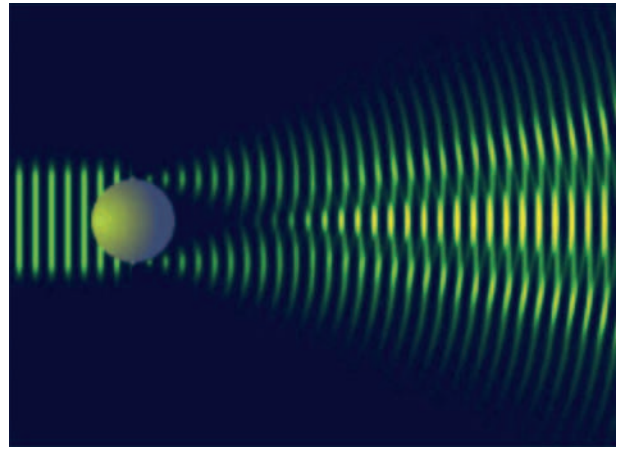


FIG. 2. Immaginiamo due persone che si trovano una di fronte all'altra, ma separate da una colonna che impedisce loro di vedersi. Nonostante questo ostacolo, se una delle due persone parla, l'altra è in grado di sentirla. Questo è dovuto al fenomeno della diffrazione che, in un certo senso, permette alle onde sonore di aggirare la colonna raggiungendo l'ascoltatore. Nella figura è esemplificato il caso di un'onda piana luminosa proveniente da sinistra (le linee verticali indicano le creste della sinusoide che si muove verso l'ostacolo sferico). La parte di onda che aggira l'ostacolo da sotto "incrocia" quella che proviene da sopra e le oscillazioni interferiscono, ossia le ampiezze dei due treni d'onda si sovrappongono. Nei punti in cui si sommano due massimi o due minimi si ottiene la massima ampiezza possibile (interferenza costruttiva) cui corrisponde la massima luminosità; nei punti in cui un massimo si somma a un minimo non avviene alcuna oscillazione (interferenza distruttiva) e la luminosità è nulla. Una volta superato l'ostacolo la radiazione prosegue aprendosi in una sorta di cono.

un elettrone in un atomo eccitato per emettere un fotone passando ad un livello energetico inferiore).

Fu proprio con l'intento di attaccare il principio di indeterminazione espresso in termini di energia e tempo che Einstein propose il seguente *Gedankenexperiment* durante il congresso Solvay del 1930. Una scatola contenente fotoni è sospesa ad una bilancia a molla che ne determina il peso con precisione. Le pareti interne sono rivestite da specchi contro cui si riflettono i fotoni. All'interno della scatola è presente un orologio che, ad un prefissato istante, fa scattare l'apertura e la successiva immediata chiusura di un foro presente in una delle pareti (FIG. 3). Si può immaginare che il foro rimanga aperto per un tempo talmente breve da permettere la fuoriuscita di un singolo fotone. Se questo fotone ha un'energia  $E$  la massa della scatola diminuisce di una quantità  $m = E/c^2$ , secondo la celeberrima formula della teoria della relatività ristretta di Einstein. La bilancia di precisione permette (in linea di principio) una misura di tale diminuzione  $m$  con un

<sup>3</sup> Una "spiegazione" intuitiva di questa seconda forma di indeterminazione è la seguente. Se vogliamo calcolare l'energia di un fotone con precisione elevata – cioè con una bassa incertezza  $\Delta E$  – dobbiamo misurarne accuratamente la frequenza, ossia il numero di "battiti" (oscillazioni) che si succedono in un intervallo temporale unitario. Statisticamente, prolungando l'intervallo di osservazione  $\Delta t$  si conteggia un maggiore numero di battiti, ottenendo così una più accurata misura della frequenza – ossia un minore  $\Delta v$  – dividendo il numero dei battiti conteggiati per il tempo di osservazione. Pertanto, aumentando  $\Delta t$  si riduce  $\Delta E$ , e viceversa.



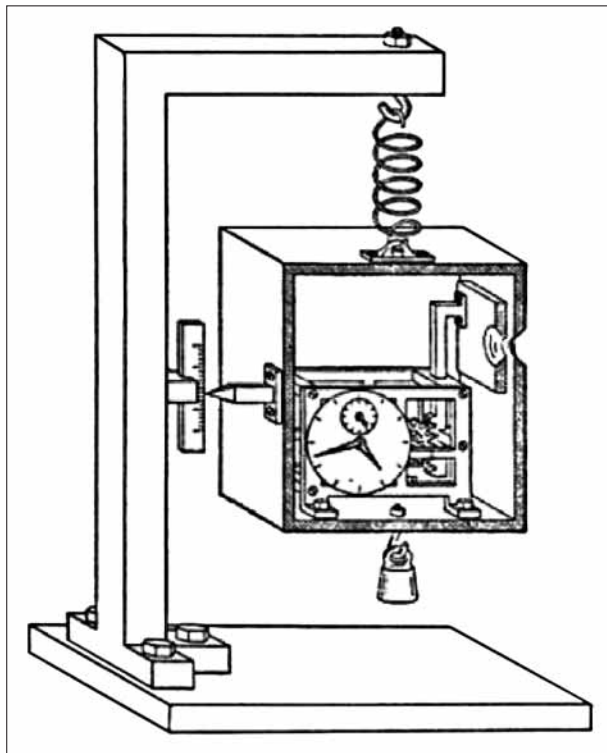


FIG. 3. Rappresentazione dell'esperimento mentale (*Gedankenexperiment*) ideato da Einstein nel tentativo di confutare il principio di indeterminazione di Heisenberg. Una scatola è appesa ad una molla in maniera che se ne possa misurare il peso grazie ad un regolo graduato fissato al montante che sostiene la scatola stessa. Quest'ultima contiene radiazione ed un timer collegato ad un otturatore in grado di controllare l'apertura e la chiusura del foro visibile sulla parete destra della scatola.

grado arbitrario di accuratezza, ossia con un'incertezza arbitrariamente piccola, che si riflette in un'incertezza  $\Delta E = \Delta mc^2$  altrettanto piccola. D'altra parte, l'orologio ideale funziona con un'accuratezza elevatissima, e quindi anche il tempo a cui avviene la fuoriuscita del fotone è noto con un'incertezza  $\Delta t$  straordinariamente piccola. Pertanto, il prodotto  $\Delta E \Delta t$  può ridursi "a piacimento" all'aumentare dell'accuratezza degli strumenti di misura, contravvenendo al principio di indeterminazione.

Quest'argomento apparve inoppugnabile persino a Bohr il quale, per tutta la sera, passò continuamente da un partecipante all'altro del congresso cercando di convincerli che, se Einstein avesse avuto ragione, questo avrebbe significato la fine della fisica. Bohr trascorse una notte insonne arrovellandosi sul problema e il mattino seguente si presentò a colazione annunciando di averlo risolto, trasformando la *débâcle* del giorno prima in quello che ancora oggi è ricordato come "il trionfo di Bohr". Una tale enfasi è dovuta al fatto che il fisico danese arrivò alle sue conclusioni facendo riferimento proprio ad una delle grandi idee di Einstein, e cioè che la gravità influenza lo scorrere del tempo; un "dettaglio" di cui proprio Einstein si era dimenticato nel proporre il suo *Gedankenexperiment*! All'uscita del fotone la scatola, alleggerendosi, si muove verso l'alto cambiando posizione all'interno del campo gravitazio-

nale. Questo influenza la velocità dell'orologio introducendo un'incertezza  $\Delta t$  nella misura del tempo a cui il fotone è rilasciato. Bohr fu in grado di dimostrare che questo porta alla disuguaglianza  $\Delta E \Delta t \approx h$  ossia alla conferma del principio di indeterminazione (si veda il livello avanzato).

*La dilatazione del tempo a causa della gravità – detta redshift gravitazionale – è uno dei risultati più spettacolari della teoria della relatività generale di Einstein. Fu proprio grazie a questo effetto, paradossalmente trascurato proprio dal fisico tedesco, che Bohr riuscì a confutare le argomentazioni di Einstein riguardanti il suo Gedankenexperiment.*

*Per capire il meccanismo del redshift gravitazionale partiamo da un esempio alquanto semplice. Supponiamo di lanciare in alto un oggetto di massa  $m$  imprimendogli una velocità  $v_0$ . Man mano che l'oggetto sale perde velocità perché la sua energia cinetica iniziale  $E_0 = 0,5 mv_0^2$  viene progressivamente spesa per compiere lavoro contro la gravità che si oppone al moto. Dai manuali di Fisica sappiamo che il lavoro  $L$  compiuto (ossia l'energia spesa) da una forza  $F$  per eseguire uno spostamento  $x$  è pari a forza  $\times$  spostamento:  $L = F \cdot x$ . Posto  $g$  l'accelerazione di gravità,<sup>4</sup> abbiamo  $F = mg$  e  $L = mgx$ . Pertanto, l'energia cinetica dell'oggetto quando raggiunge la quota  $x$  è  $E = E_0 - L$ , da cui, dopo qualche semplice manipolazione, otteniamo la velocità*

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{2gx}{v_0^2}}$$

*Dalla Relatività Generale sappiamo che anche la radiazione è sottoposta all'azione della gravità. Quindi, anche un fotone "in fuga" perde energia, ma la sua velocità rimane  $c = 300.000$  km/s, giacché questa sua caratteristica è una costante della natura. In realtà, l'energia iniziale di un fotone è proporzionale alla sua frequenza  $\nu_0$ :  $E_0 = h\nu_0$ . Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli precedentemente sviluppati per una particella materiale, otteniamo l'energia (e dunque la frequenza) del fotone quando raggiunge un'altezza  $x$ :*

$$h\nu = h\nu_0 - mgx = h\nu_0 - \frac{h\nu_0}{c^2} gx.$$

<sup>4</sup> Nel seguito assumeremo sempre spostamenti verticali  $x$  molto piccoli rispetto al raggio terrestre, pertanto siamo giustificati nell'assumere un'accelerazione gravitazionale costante piuttosto che dipendente dall'inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra. Infatti  $g = GM_{\oplus}/(R_{\oplus} + x)^2 = GM_{\oplus}/(R_{\oplus}^2 + 2R_{\oplus}x + x^2) \approx GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$ , dove l'ultimo passaggio è valido in quanto gli ultimi due termini al denominatore sono trascurabili rispetto al primo se  $x \ll R_{\oplus}$ ; qui  $G$  è la costante gravitazionale e  $M_{\oplus}$  e  $R_{\oplus}$  sono, rispettivamente, la massa e il raggio della Terra.

L'ultimo passaggio dell'equazione precedente è stato ottenuto ricorrendo all'equazione di Einstein  $E = mc^2$ . Possiamo pertanto scrivere<sup>5</sup>

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{gx}{c^2} \right). \quad (1)$$

Alla frequenza  $\nu$  corrisponde un periodo di oscillazione  $T = 1/\nu$ . Dall'equazione precedente possiamo dunque scrivere

$$T_0 = T \left( 1 - \frac{gx}{c^2} \right),$$

ossia

$$T = T_0 \left( 1 - \frac{gx}{c^2} \right)^{-1} \cong T_0 \left( 1 + \frac{gx}{c^2} \right).$$

Quest'ultimo passaggio<sup>6</sup> è giustificato dal fatto che sulla Terra  $gx/c^2 \ll 1$ . Infatti, anche considerando un'altezza  $x = 10.000$  m (maggiore di quella del monte Everest), essendo  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> abbiamo  $gx/c^2 \cong 10^{-12}$ . In conclusione, ad un certo istante il tempo segnato da un orologio posto alla quota  $x$  non è  $t_0$  (segnato per  $x = 0$ ) ma  $t = t_0 + \Delta t$ , con

$$\Delta t = \frac{t_0 gx}{c^2}. \quad (2)$$

In quest'ultima equazione abbiamo intenzionalmente sostituito il simbolo  $T$  con il generico tempo  $t$ . Infatti la variazione del periodo di oscillazione non riguarda semplicemente i fenomeni ondulatori: è proprio il generale scorrimento del tempo che viene dilatato in misura tanto maggiore quanto più intensa è la gravità; ad esempio, i movimenti dei pedoni appaiono rallentati ad un osservatore posto in cima ad una torre (nella vita quotidiana questo

<sup>5</sup> Nel 1960 questa formula è stata sottoposta a verifica sperimentale presso l'università Harvard. Un raggio gamma venne emesso dall'isotopo instabile del ferro  $^{57}_{26}\text{Fe}$  posto alla base di una torre alta 22,6 m, e intercettato in cima alla torre stessa. La variazione percentuale tra la frequenza emessa e quella misurata risultò essere  $-2,46 \times 10^{-15}$ , in eccellente accordo con il valore previsto dall'eq. (1).

<sup>6</sup> Si consideri la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1+a}{(1-a)(1+a)} = \frac{1+a}{1-a^2} \cong 1+a.$$

L'ultimo passaggio è giustificato se  $a$  è molto piccolo: in questo caso  $a^2 \ll a \ll 1$ , e  $a^2$  al denominatore si può trascurare rispetto a 1.

fenomeno è assolutamente trascurabile a causa della scarsa gravità della Terra).<sup>7</sup>

Veniamo ora finalmente al ragionamento di Bohr. Dopo il rilascio del fotone, la scatola si solleva a causa della perdita di peso. Si possono allora aggiungere in successione vari pesi  $\Delta m$  fino a compensare la massa  $m$  persa e far tornare la scatola alla quota originaria (in modo che l'orologio al suo interno torni a scorrere alla velocità iniziale). Questa operazione richiede un certo tempo  $t$  che dipende dalla forza della molla e dall'efficacia dello smorzamento delle sue oscillazioni dovuto all'attrito interno della molla stessa.<sup>8</sup> Al passare del tempo l'ago della lancetta solidale alla scatola "converge" sempre più verso la posizione iniziale (lo zero della scala graduata posta sull'asta di sostegno) fino a raggiungere un'incertezza sufficientemente piccola da considerarsi tollerabile, e comunque non più piccola dell'indeterminazione dettata dalla meccanica quantistica. A questa incertezza nella posizione corrisponde un'incertezza nella misura della massa.

L'aggiunta dei pesi comunica una quantità di moto  $p$  alla scatola che può essere misurata con un'accuratezza limitata dalla relazione  $\Delta p \Delta x \approx h$  (il principio di indeterminazione coinvolgente impulso e posizione non era messo in discussione da Einstein). Naturalmente abbiamo  $\Delta p < gt \Delta m$  (infatti l'aggiunta dell'ultima massa  $\Delta m$  impartisce alla scatola una velocità necessariamente inferiore a  $gt$ , la velocità che si avrebbe in assenza della resistenza della molla e considerando tutto il tempo della misura invece che l'intervallo temporale relativo all'aggiunta dell'ultima massa). In conclusione, otteniamo  $gt \Delta m \Delta x > h$ .

$$gt \Delta m \Delta x = c^2 \Delta m \Delta t = \Delta E \Delta t > h,$$

dove, nel primo passaggio, si è tenuto conto dell'eq. (2). Otteniamo perciò un risultato in accordo con il principio di indeterminazione di Heisenberg: l'accuratezza con cui viene misurata l'energia di un fotone restringe la precisione con cui è misurato il tempo a cui è il fotone stesso è rilasciato.

<sup>7</sup> In verità il sistema GPS (Global Positioning System) di utilizzo quotidiano tiene conto della dilatazione temporale dovuta alla gravità, altrimenti commetterebbe un errore di 15 km nel rilevamento di una posizione.

<sup>8</sup> L'attrito interno della molla aggiunge calore (e perciò massa-energia) al sistema, ma si può dimostrare che l'errore prodotto da questo effetto (non considerato da Bohr) è trascurabile.

**Annibale D'Ercole** si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.