

Spigolature astronomiche★

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS)

Rifrazione, onda evanescente ed effetto tunnel

Annibale D'Ercole

CONSIDERIAMO un muro di recinzione di altezza h_0 e immaginiamo di calciare un pallone di massa m comunicandogli una velocità iniziale (circa verticale) v_i e un'energia E_i in forma di *energia cinetica* $K_i = 0,5 mv_i^2$ (FIG. 1). Man mano che il pallone sale la sua velocità e la sua energia cinetica si riducono. D'altra parte, sappiamo che in Natura l'energia si conserva, dunque che fine fa l'energia mancante? Essa in realtà non è sparita ma è rimasta "immagazzinata" nel campo gravitazionale sotto forma di *energia potenziale* $U = mgh$ (dove $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità) a disposizione del pallone e che gli viene restituita quando il pallone, ricadendo in basso, riacquista energia cinetica a spese di quella potenziale.¹ L'energia totale del pallone si conserva, ossia rimane costante lungo tutta la sua traiettoria: $E_i = K + U$ (questo argomento è trattato in maggior dettaglio nella Spigolatura n. 3 del 2023). La massima altezza raggiunta, h_{max} , è quella in cui il pallone si ferma prima di ricadere. A questa altezza $K = 0$ e, dall'equazione precedente, abbiamo $h_{\text{max}} = E_i/mg$. È chiaro che il pallone è in grado di scavalcare il muro se $h_{\text{max}} > h_0$ mentre non lo è se $h_{\text{max}} < h_0$. In vista delle argomentazioni che seguiranno, risulta più utile trasformare questi vincoli sulle altezze in vincoli energetici. Possiamo definire $U_0 \equiv mgh_0$ e $U_{\text{max}} \equiv mgh_{\text{max}} = E_i$ (questo passaggio

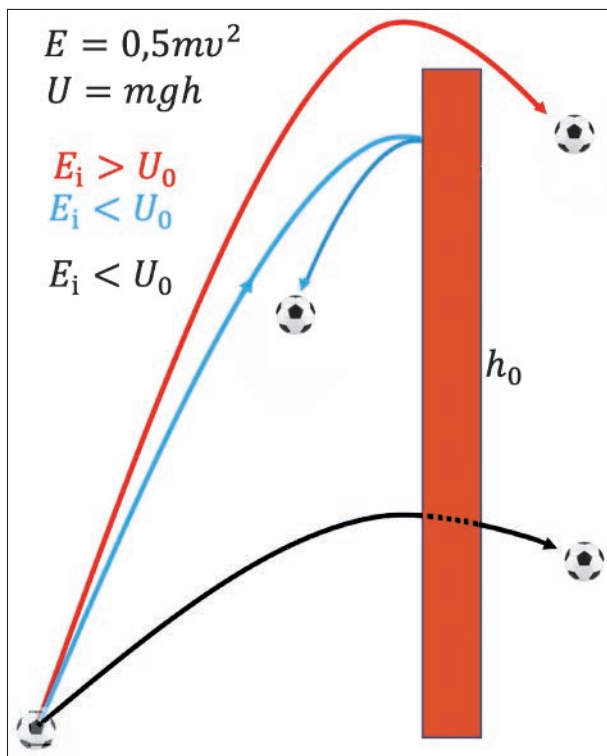


FIG. 1. Classicamente, le traiettorie rossa e azzurra rappresentano, rispettivamente, il caso in cui il pallone supera o meno il muro a seconda della sua energia iniziale. La traiettoria nera rappresenta il caso quantistico in cui il pallone, grazie all'effetto tunnel, si ritrova al di là del muro anche nel caso in cui abbia un'energia insufficiente (si veda il testo per i dettagli).

* Questa rubrica – iniziata nel 1999 e che ha raggiunto quasi i 100 numeri – si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare a un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

¹ Analogamente, quando comprimiamo una molla l'energia muscolare spesa rimane immagazzinata in forma di energia potenziale nella molla stessa e viene restituita da quest'ultima come energia cinetica quando le permettiamo di espandersi.

deriva sempre dalla conservazione dell'energia). Pertanto, il pallone potrà superare il muro solo se $E_i > U_0$ e non in caso contrario.

Quest'ultima affermazione è vera in fisica classica ma non in meccanica quantistica; se valesse a livello macroscopico (sappiamo che in realtà essa vale a livello atomico e subatomico), allora vi sarebbe una probabilità non nulla che il pallone si ritrovi al di là del muro anche nel caso $E_i < U_0$ (FIG. 1). Questo stupefacente risultato è detto *effetto tunnel*. Prima di descrivere tale effetto nel suo ambito naturale (ossia – come si è detto – in meccanica quantistica) nei prossimi paragrafi divagheremo (solo apparen-

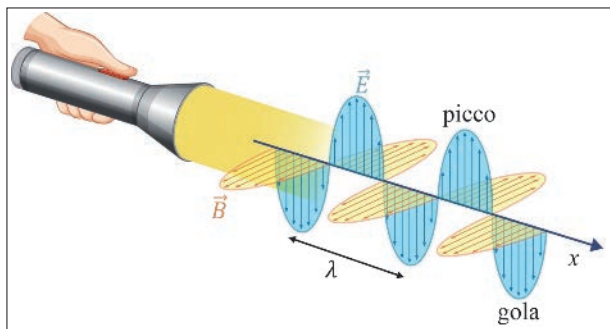


FIG. 2. Un raggio luminoso emesso da una sorgente può essere interpretato come una sottile linea propagantesi in direzione x (nel caso dell'ottica geometrica) oppure, più realisticamente, come un'onda composta da oscillazioni di un campo elettrico (freccie azzurre) ed uno magnetico (freccie gialle) ortogonali tra loro e propagantesi lungo l'asse x . I picchi e le gole indicano l'ampiezza di oscillazione, mentre la distanza tra due picchi (o gole) successivi rappresenta la lunghezza d'onda λ della radiazione.

temente) appoggiandoci ancora alla fisica classica, più propriamente alla sua trattazione della propagazione della luce.

La luce può essere raffigurata come un raggio propagantesi in linea retta oppure, più realisticamente, come un'onda composta da oscillazioni di un campo elettrico ed uno magnetico ortogonali tra loro (FIG. 2). La prima descrizione va sotto il nome di *ottica geometrica* e rappresenta un'approssimazione valida quando le dimensioni degli oggetti (lenti, specchi, aperture, ecc.) sono molto più grandi della lunghezza d'onda della luce ($\lambda \sim 10^{-7}$ m). L'interpretazione ondulatoria è invece necessaria quando le grandezze in gioco sono dell'ordine di λ e si verificano fenomeni quali, p.e., l'*interferenza* (che incontreremo più in là).

Premesso quanto sopra, consideriamo ora un esempio di ottica geometrica utile per i nostri scopi. I mezzi trasmissivi sono mezzi che possono essere attraversati dalla luce, e ciascuno è caratterizzato da un proprio valore dell'indice di rifrazione n . Quest'ultimo è un numero adimensionale che determina il rapporto tra la velocità della luce c nel vuoto (pari a 300.000 km/s) e la velocità v nel mezzo:² $n \equiv c/v$. Con riferimento alla FIG. 3a, si vede che se un raggio attraversa l'interfaccia tra due mezzi passando da quello con n_1 ad un altro con $n_2 < n_1$ – come ad esempio da vetro ($n_1 = 1,5$) ad aria ($n_2 = 1$) – esso viene in parte riflesso e in parte rifratto, ossia attraversa l'interfaccia deviando dalla direzione originaria. Il raggio riflesso forma con la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi un angolo θ_1 uguale a quello del raggio incidente. L'angolo del raggio rifratto, invece, è regolato dalla *legge di Snell* (la cui dimostrazione verrà data nel livello avanzato)

² Quando la luce entra in un mezzo materiale, l'onda elettromagnetica interagisce con gli elettroni di tale mezzo e viene continuamente assorbita e riemessa introducendo un ritardo percepito come rallentamento rispetto alla velocità nel vuoto dove la luce si muove liberamente.

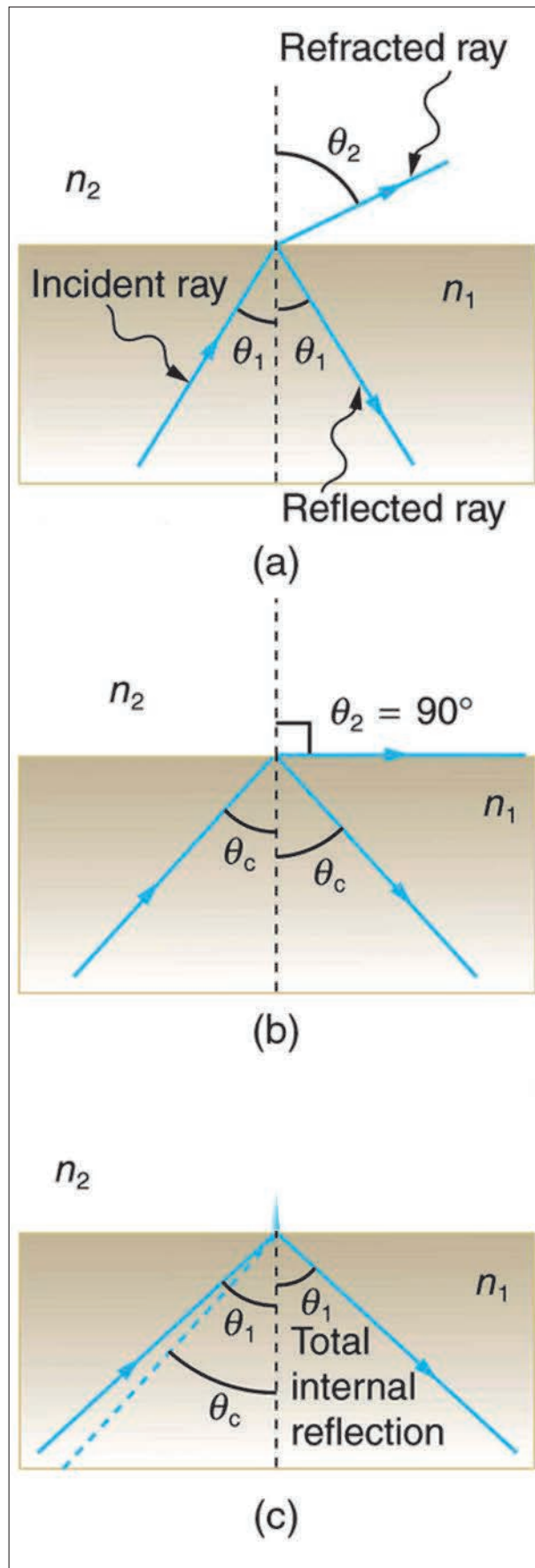


FIG. 3. a) Un raggio luminoso (linea rossa) procede da un mezzo con indice di rifrazione n_1 a uno con indice di rifrazione $n_2 < n_1$. θ_1 e θ_2 rappresentano, rispettivamente, l'angolo di incidenza (e riflessione) e di rifrazione. b) Quando $\theta_1 = \theta_c$ il raggio rifratto si propaga parallelamente alla superficie di contatto dei due mezzi. c) Per $\theta_1 > \theta_c$ si verifica la condizione TIR e non vi è alcuna rifrazione ma appare una breve "appendice": si tratta dell'onda evanescente.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (1)$$

Come si vede in FIG. 3a, $\theta_1 < \theta_2$. Questo vuol dire che esiste un angolo critico θ_c di incidenza a cui corrisponde un angolo di rifrazione $\theta_2 = 90^\circ$, per cui il raggio rifratto si propaga parallelamente al piano di contatto tra i due mezzi (FIG. 3b). Essendo $\sin 90^\circ = 1$, dall'eq. (1) otteniamo $\sin \theta_c = n_2/n_1$, e quindi

$$\theta_c = \arcsen \left(\frac{n_2}{n_1} \right); \quad (2)$$

nel caso di vetro e aria abbiamo $\theta_c = 41,81^\circ$.

Quando $\theta_1 > \theta_c$ si verifica solo la riflessione – che per questo viene detta riflessione interna totale o TIR (dall'acronimo inglese di *total internal reflection*) – ed il raggio riflesso trasporta la stessa energia di quello incidente. In verità, come mostrato in (FIG. 3c), una piccola “intrusione” nel mezzo 2 si verifica, ma è di breve estensione in quanto la sua intensità decresce esponenzialmente (su una scala dell'ordine di λ) e non trasporta energia lontano dalla superficie di contatto. Per questo motivo l'onda associata a questo raggio è detta *evanescente*.

Nel livello avanzato daremo una descrizione più accurata di quest'onda. Per il momento ci concentreremo su una sua proprietà che l'accomuna all'effetto tunnel. In FIG. 4a vediamo un raggio luminoso che attraversa un prisma di vetro e viene totalmente riflesso da un suo lato giacché l'angolo di incidenza $\theta_1 = 45^\circ$ è maggiore dell'angolo critico $\theta_c = 41,81^\circ$ (vedi sopra); similmente alla FIG. 3c, anche in questo caso appare un'onda evanescente. In FIG. 4b un secondo prisma è posto ad una distanza d dell'ordine di λ ; l'onda evanescente nello spazio tra i due prismi ha ancora un'ampiezza non nulla quando tocca il secondo prisma e un raggio può trasmettersi attraverso quest'ultimo. Questo effetto è denominato FTIR dall'acronimo inglese di *frustrated total internal reflection*, dove l'aggettivo “frustrato” si riferisce al raggio riflesso che non trasporta più la totalità dell'energia del raggio incidente (TIR), ma ne cede parte a quello rifratto. Il raggio che attraversa il secondo prisma ha un'intensità che aumenta al decrescere di d . Se $d = 0$ il raggio luminoso attraversa i due prismi posti a diretto contatto che vengono “interpretati” come un unico blocco in quanto hanno lo stesso indice di rifrazione; pertanto, il raggio attraversa la superficie di contatto senza essere riflesso o rifratto (FIG. 4c).

Torniamo a considerare la FIG. 4b concentrandoci unicamente sul raggio rifratto. Possiamo interpretare lo spazio d come una “barriera d'aria” interposta tra i due prismi di vetro. Nonostante la sua presenza il raggio incidente riesce a passare dall'altra parte e proseguire nel secondo prisma. Questo attraversamento è molto simile all'effetto tunnel ed è reso possibile grazie alla natura ondulatoria della luce, come mostrato in FIG. 5. In questa figura il raggio incidente è rappresentato da un'onda la cui ampiezza, raggiunta la barriera, tende a ridursi espo-

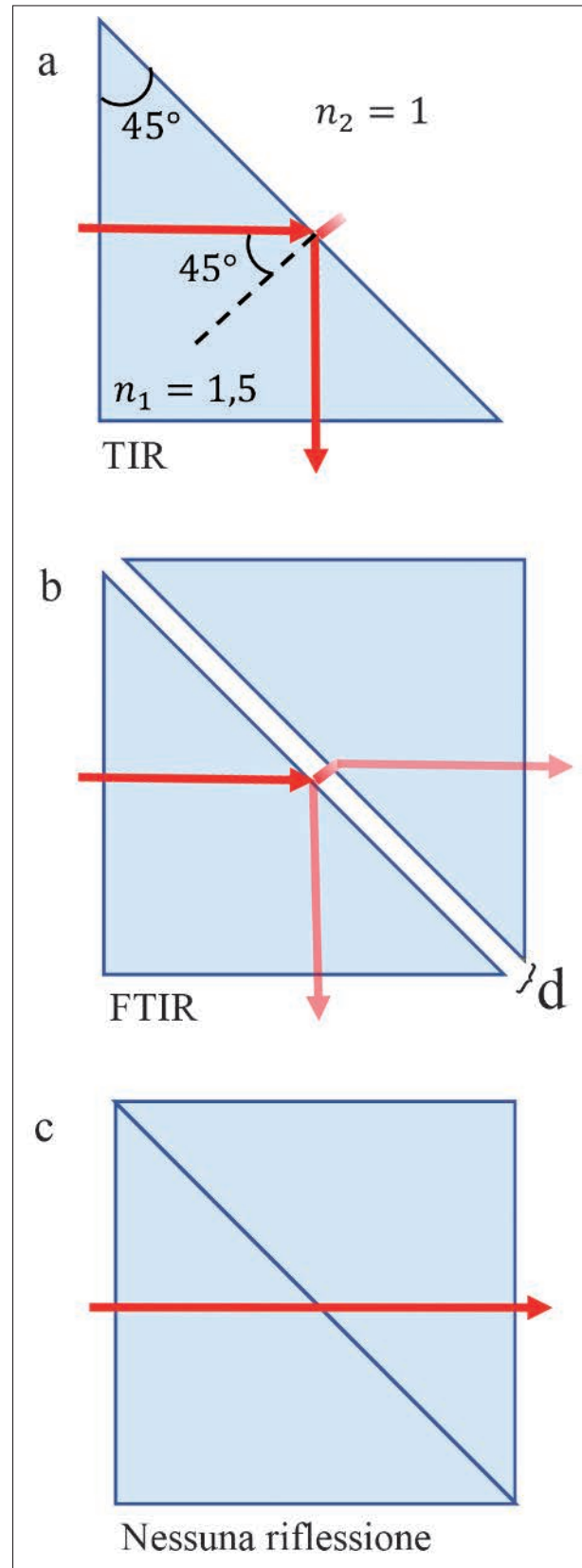


FIG. 4. a) Un raggio luminoso attraversa un prisma di vetro ($n_1 = 1,5$) e viene riflesso con un angolo di incidenza di $45^\circ > 41,81^\circ$ che è l'angolo critico; si verifica quindi la condizione TIR. b) Ponendo un secondo prisma ad una distanza $d \sim \lambda$ dal primo otteniamo la condizione FTIR. c) Se i due prismi sono a contatto, il raggio luminoso attraversa la superficie di separazione e prosegue normalmente.

nenzialmente formando l'onda evanescente. Tuttavia, la “coda” di quest'onda oltrepassa l'ostacolo e continua a propagarsi dando luogo all'onda rifratta

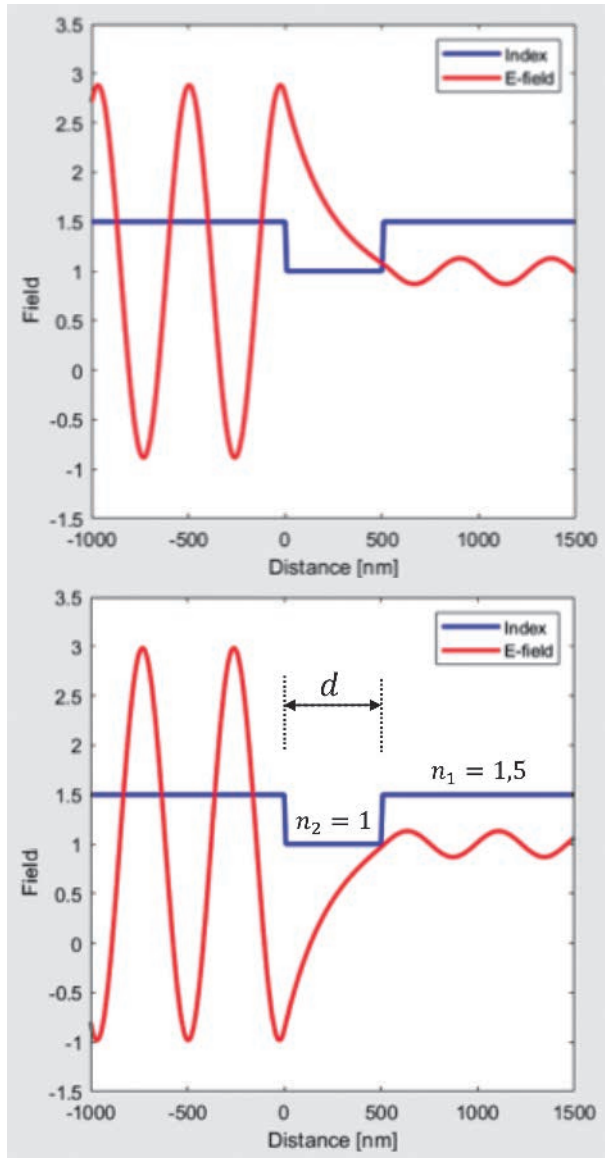


FIG. 5. Il fenomeno FTIR illustrato dal punto di vista ondulatorio (la luce riflessa non è considerata). La linea blu rappresenta l'andamento (lungo la linea di propagazione) dell'indice di rifrazione in una situazione come quella in FIG. 4b. La linea rossa mostra l'andamento delle oscillazioni del campo elettrico nel passare da un prisma all'altro separati da una distanza d . I due pannelli si riferiscono a due "fotogrammi" distanziati da mezzo periodo di oscillazione.

reale la cui ampiezza è inferiore a quella dell'onda incidente. Dal momento che l'intensità della luce è proporzionale al *quadrato dell'ampiezza*, il raggio rifratto è meno luminoso di quello incidente.

Il motivo per cui ci siamo dilungati su alcuni aspetti della natura ondulatoria della luce (e sull'onda evanescente in particolare) è dovuto all'analogia che essa mostra con il comportamento quantistico delle particelle elementari e che ci permetterà di capire meglio l'effetto tunnel. Infatti, le particelle elementari mostrano una duplice natura ondulatoria/particellare; tale natura – e il parallelismo con il comportamento della radiazione – sono evidenziati dal celebre esperimento di Young.

In questo esperimento un'onda luminosa monocromatica piana colpisce un diaframma con due fenditure sottili e vicine (FIG. 6a). Queste fenditure,

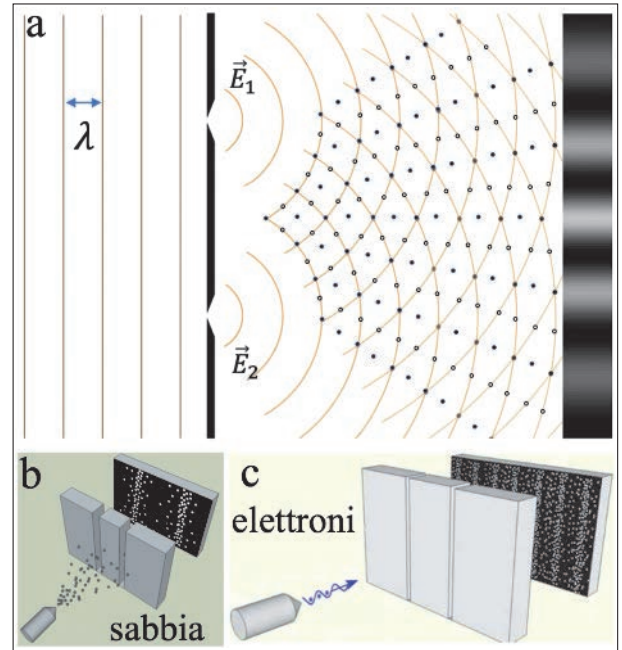


FIG. 6. L'esperimento di Young. a) Le linee verticali rappresentano i picchi del campo elettrico \vec{E} di un'onda elettromagnetica piana monocromatica di lunghezza d'onda λ indirizzata verso il diaframma (per semplicità non vengono riportate le linee corrispondenti alle gole che si trovano a metà strada tra quelle dei picchi). Dalle due fessure si propagano due serie di onde circolari che interferiscono. I punti dove si realizzano le interferenze costruttive sono indicati da cerchi pieni neri posizionati all'incrocio delle linee e al centro dei rettangoloidi (dove si incrociano le gole). I cerchi vuoti indicano la posizione delle interferenze distruttive. A destra è rappresentato uno schermo su cui si formano frange chiare e scure; b) Nel caso in cui il diaframma venga investito da un flusso di granelli di sabbia si formano solo due frange; c) Se al posto dei granelli di sabbia consideriamo degli elettroni, torna a formarsi una serie di frange (gli elettroni emessi dal "cannoncino" sono raffigurati sia come punti che come onde per sottolineare la loro duplice natura onda/particella).

attraversate dall'onda, agiscono come se fossero a loro volta sorgenti di onde che si espandono circolarmente (come le onde che si formano in uno stagno quando vi si getta un sasso) fino a raggiungere uno schermo. I due sistemi di onde si propagano e si sovrappongono dando luogo al fenomeno dell'*interferenza*. Nei punti in cui sono presenti due picchi o due gole contemporaneamente l'ampiezza dell'onda risultante raddoppia e l'intensità quadruplica: è questo il caso dell'*interferenza costruttiva*. Si chiama invece *interferenza distruttiva* l'occorrenza della sovrapposizione di un picco e di una gola: nei punti dove questo accade la luminosità è nulla. Le regioni dello schermo raggiunte da interferenze costruttive mostrano frange luminose mentre quelle raggiunte da interferenze distruttive rimangono scure (FIG. 6a).

La realizzazione di una serie di frange è caratteristica dei fenomeni ondulatori. Immaginiamo ora che, invece di un'onda piana, il diaframma sia colpito da un flusso di particelle macroscopiche come, p.e., granelli di sabbia (per quanto piccolo, un granello di sabbia contiene $\sim 10^{20}$ atomi di silicio ed è dunque decisamente enorme su scala atomica). I granelli che superano le fenditure proseguono lun-

go una traiettoria rettilinea fino a colpire uno schermo opportuno dove lasciano un "impronta" quasi puntiforme. L'insieme di questi punti dà luogo a due sole frange poste di fronte alle fessure, com'è abbastanza intuitivo (FIG. 6b). Se però sostituiamo i granelli di sabbia con elettroni, i puntini sullo schermo formano un sistema di frange come nel caso della luce (FIG. 6c). Dunque, l'impronta puntiforme sullo schermo testimonia la natura particellare dell'elettrone; d'altra parte la formazione di una sequenza di frange indica che l'elettrone, durante il tragitto dal diaframma allo schermo, ha proprietà ondulatorie per cui la sua posizione non può essere ricondotta ad un punto preciso ma è diffusa nello spazio e la sua evoluzione è descritta dalla *funzione d'onda* $\Psi(r, t)$. Ma qual è il significato di questa misteriosa onda associata all'elettrone?

Per la fisica classica è possibile tracciare la traiettoria di un corpo misurandone con precisione la posizione r ad ogni istante. Ma come mostrato dall'esperimento di Young questo non è ammissibile se abbiamo a che fare con particelle atomiche o subatomiche come, p.e., un elettrone. In questo caso è necessario ricorrere alla meccanica quantistica che si basa su argomenti probabilistici: non possiamo sapere con certezza dove sia un elettrone, ma possiamo calcolare la probabilità di trovarlo ad un certo istante in una certa regione dello spazio. Questa probabilità è data dal quadrato della funzione d'onda Ψ^2 . Nell'esperimento di Young le frange più intense si ottengono dove si verificano interferenze costruttive delle onde elettromagnetiche; analogamente, nel caso degli elettroni, le frange più popolate di puntini si realizzano dove sono presenti le interferenze costruttive di Ψ , ossia dove è più probabile trovare gli elettroni.³

La dualità onda-particella implica che, p.e., un elettrone possa attraversare una barriera di potenziale anche se la sua energia cinetica è inferiore all'altezza della barriera (un comportamento impossibile classicamente), come illustrato in FIG. 7 (si noti l'analogia con FIG. 5). Perché l'effetto tunnel possa realizzarsi la barriera non dev'essere troppo spessa (alcune lunghezze d'onda di Ψ) per evitare che l'onda evanescente declini a zero. L'ampiezza dell'onda che si propaga oltre la barriera è ridotta rispetto a quella dell'onda incidente; questa riduzione non rappresenta, come nel caso del raggio rifratto, una diminuzione dell'energia dell'elettrone (che rimane costante) ma una minore probabilità che esso possa trovarsi al di là della barriera piuttosto che al di qua. Come abbiamo già sottolineato, la meccanica quantistica è probabilistica: se lanciamo molte particelle di bassa energia contro una barriera, per la maggior parte esse non superano l'ostacolo, ma alcune, statisticamente, vi riescono grazie all'effetto

³ All'argomento trattato alquanto frettolosamente in questo paragrafo sono state dedicate due precedenti Spigolature, la n. 1 del 2001 e la n. 1 del 2024. Ad esse il lettore è rimandato per maggiori approfondimenti.

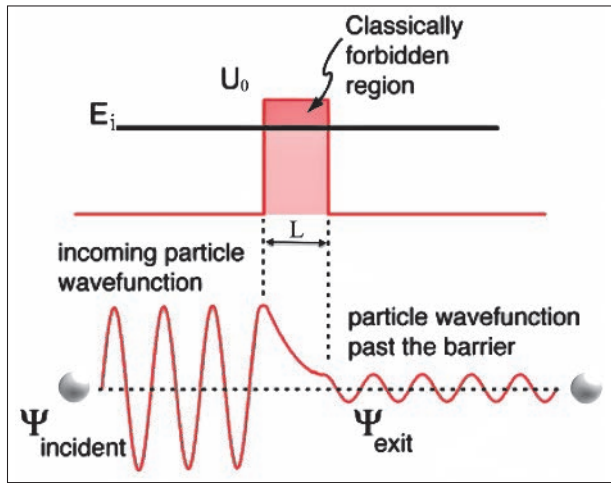


FIG. 7. L'effetto tunnel. Nel diagramma superiore la linea rossa rappresenta un "muro" (analogo a quello in FIG. 1) di potenziale elettrico U_0 maggiore dell'energia E_i (linea nera) della particella che rimane costante prima, durante e dopo l'attraversamento della barriera. Nel diagramma inferiore è raffigurata l'onda di probabilità associata all'elettrone incidente. L'ampiezza dell'onda decresce esponenzialmente durante l'attraversamento della barriera (in analogia a quanto accade in FIG. 5) e l'onda trasmessa ha un'ampiezza inferiore a quella incidente.

tunnel. La probabilità per una singola particella che questo avvenga è data dall'esponenziale⁴

$$P \approx \exp\left(-2L \sqrt{\frac{2m(U_0 - E_i)}{\hbar^2}}\right), \quad (3)$$

dove m rappresenta la massa della particella e $\hbar \equiv h/2\pi$ è legata alla costante di Planck $h \approx 6,63 \times 10^{-34}$ J·s; gli altri simboli sono rappresentati in FIG. 7 dove la barriera ha forma rettangolare.⁵ Come si evince dalla formula, la probabilità cresce al diminuire dello spessore della barriera e del "deficit" di energia $(U_0 - E_i)$ che la particella ha rispetto alla barriera. Inoltre, le particelle leggere (come gli elettroni) hanno una probabilità molto maggiore rispetto a quelle pesanti.⁶

L'effetto tunnel è presente nella nostra vita quotidiana molto più di quanto si tenderebbe a credere. Ad esempio, ogni conduttore esposto all'aria si ricopre rapidamente di uno strato di ossido, per cui cavi intrecciati o connessi con viti, morsetti ecc. (o anche le usuali lampadine avvitate nella loro sede) presentano strati isolanti fra le giunzioni. La corrente elettrica, tuttavia, scorre ugualmente grazie all'effetto tunnel. Questo effetto è altresì alla base di molti dispositivi elettronici quali diodi, memorie flash e microscopi elettronici. Ricordiamo infine che l'effetto tunnel consente anche il verificarsi del fenomeno della radioattività e la fusione dell'idro-

⁴ Per una più comoda lettura della formula adottiamo la convenzione $\exp(x) \equiv e^x$.

⁵ La forma rettangolare è una semplificazione che facilita i calcoli. Tuttavia potenziali rettangolari vengono effettivamente realizzati ed utilizzati nel campo dei semiconduttori o in dispositivi come il microscopio elettronico.

⁶ Questo spiega perché per oggetti macroscopici l'effetto tunnel è sostanzialmente trascurabile.

geno al centro del Sole (senza la quale non esistemmo). Approfondiremo quest'ultimo punto nel livello avanzato.

Come anticipato nel livello base, analizziamo ora due argomenti: la legge di Snell (con relativa onda evanescente) e il ruolo dell'effetto tunnel nel processo di fusione all'interno del Sole.

Cominciamo dal primo argomento esaminando qui il fenomeno della rifrazione sulla base dell'aspetto ondulatorio della luce.⁷ Iniziamo ricordando che la velocità di un'onda elettromagnetica in un mezzo con indice di rifrazione n è pari a $v = c/n$, dove c è la velocità nel vuoto (il quale ha, pertanto, $n = 1$). In FIG. 8a abbiamo un'onda piana monocromatica (le cui creste e gole sono rappresentate, rispettivamente, da rette verdi e blu) che viaggia con un angolo di incidenza θ_1 in un mezzo con indice di rifrazione n_1 , e che poi si propaga con un angolo di rifrazione θ_2 in un mezzo adiacente con $n_2 < n_1$.

Osserviamo che all'interfaccia dei due mezzi le linee verdi e blu indicanti l'onda incidente non solo cambiano inclinazione, ma appaiono anche "spezzarsi" in quanto si trovano a contatto con linee di colore opposto (o con l'interspazio tra esse) rappresentanti l'onda rifratta; questo significa, ad esempio, che una cresta dell'onda incidente si trasforma istantaneamente in una gola non appena attraversa la superficie di separazione. Questa eventualità non ha senso fisico e la rappresentazione dell'onda rifratta in FIG. 8a è scorretta. È necessario invece che si realizzi una continuità, ossia che in ogni punto della superficie di contatto l'onda superiore e quella inferiore abbiano lo stesso valore; dal punto di vista grafico questo significa che le righe dell'onda incidente si piegano senza "rompersi", come mostrato correttamente in FIG. 8b.

Dalla FIG. 9 si evince che le velocità con cui le estremità delle creste dell'onda incidente e di quella rifratta "scorrono" lungo l'interfaccia sono, rispettivamente, $v_{s1} = c/n_1 \sin \theta_1$ e $v_{s2} = c/n_2 \sin \theta_2$ e, per i motivi di continuità esposti più sopra, deve essere $v_{s1} = v_{s2}$. Per un fissato valore di θ_1 c'è un unico valore di θ_2 per cui questa uguaglianza possa realizzarsi, dando così luogo (com'è facile verificare) alla legge di Snell [eq. (1)] nel caso $\theta_1 < \theta_c$. Nel caso $\theta_1 = \theta_c$ si ottiene naturalmente l'eq. (2) e l'onda rifratta si propaga parallelamente alla superficie di contatto (FIG. 10a). Se $\theta_1 > \theta_c$ abbiamo $v_{s1} < v_{s2}$, in contraddizione con l'ipotesi di partenza; pertanto in questo caso l'onda rifratta non può esistere (si verifica la condizione TIR).

⁷ La rifrazione è stata descritta in dettaglio nelle *Spigolature* n. 3 del 2015. Lì, però, si è adottata l'approssimazione geometrica, e la legge di Snell è stata ottenuta in base al principio di Fermat secondo cui il percorso fra due punti preso da un raggio di luce è quello che è attraversato nel minor tempo.

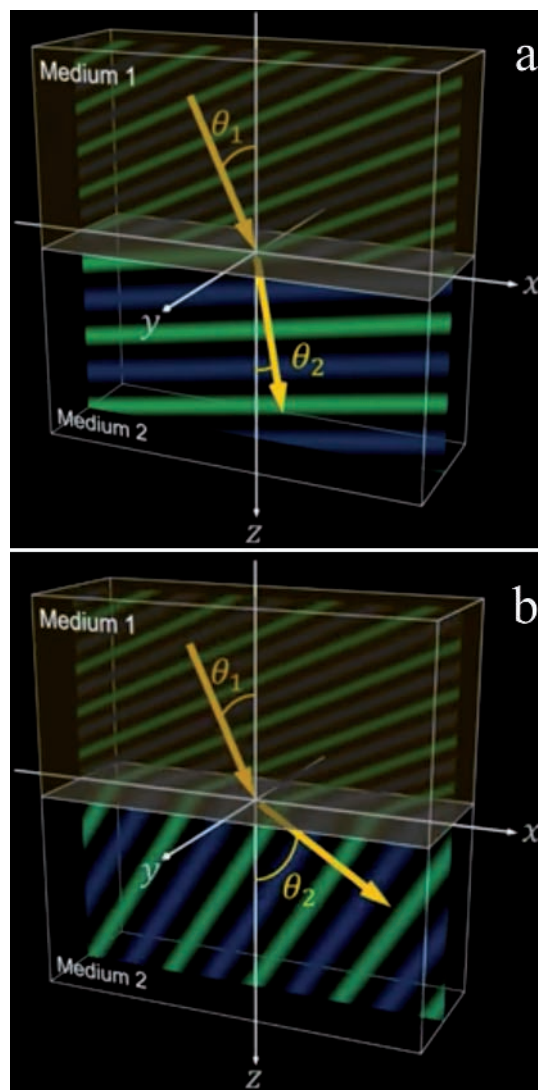


FIG. 8. a) Sono illustrati due mezzi con diverso indice di rifrazione. Il mezzo 1 con indice di rifrazione n_1 occupa il semispazio superiore ($z < 0$) mentre il mezzo 2 con indice di rifrazione $n_2 < n_1$ occupa il semispazio inferiore ($z > 0$). I due mezzi sono a contatto lungo la superficie $z = 0$. Le linee verdi e blu rappresentano le creste e le gole di un'onda piana. Le due frecce gialle indicano il verso di propagazione dell'onda incidente (in alto) e rifratta (in basso). Questa figura è sbagliata in quanto non c'è continuità delle linee verdi e blu attraverso la superficie di separazione. b) Questa figura, invece, è corretta in quanto la continuità è presente e l'angolo di rifrazione θ_2 è maggiore dell'angolo di incidenza θ_1 , in accordo con la legge di Snell. Per chiarezza non è riportata l'onda riflessa.

Tuttavia, una breve intrusione nel mezzo 2 si verifica ugualmente (FIG. 10b). Il motivo, ancor una volta, è dovuto al fatto che un'onda non può interrompersi "ex abrupto" e c'è quindi necessità di una continuità attraverso il piano di separazione tra i due mezzi. Si forma così un'onda evanescente che si propaga parallelamente alla superficie di contatto, ma con un'ampiezza che decade esponenzialmente con la distanza da tale superficie; una simile onda non trasporta energia.

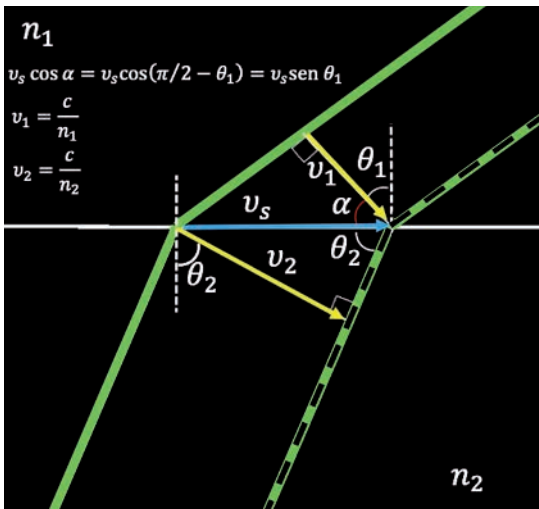


FIG. 9. La linea bianca orizzontale rappresenta il contatto tra un mezzo con indice di rifrazione n_1 ed uno con indice di rifrazione $n_2 < n_1$. Le due linee verdi continue rappresentano una cresta incidente (in alto) e una rifratta (in basso), mentre le linee verdi tratteggiate mostrano le stesse creste dopo un tempo unitario (p.e. 1 s). Le due frecce gialle indicano le velocità delle onde incidente e rifratta, mentre la freccia blu rappresenta la velocità di scorrimento delle intersezioni delle creste d'onda con la linea divisoria. Infine θ_1 e θ_2 sono, rispettivamente, l'angolo di incidenza e quello di rifrazione. Le due linee bianche tratteggiate servono a guidare l'occhio e non hanno alcun significato fisico.

Quanto appena detto vale in generale per vari tipi di onde tra cui, in particolare, l'onda di probabilità associata alle particelle in meccanica quantistica. La funzione Ψ deve rimanere continua a contatto con la "parete" di una barriera di potenziale e si estende perciò al suo interno tramite una "coda" esponenziale (FIG. 7).

Passiamo ora al secondo argomento, ossia la fusione tra protoni. Com'è noto, la maggior parte dell'energia prodotta dal Sole deriva dalla fusione di coppie di protoni che, "in collaborazione" con coppie di neutroni, formano nuclei di elio (2 protoni+2 neutroni).⁸ Le due forze che regolano la fusione sono quella di Coulomb (che si esercita tra cariche elettriche) e la forza forte. Quest'ultima – la forza (attrattiva) nucleare – ha un raggio d'azione $r_n \sim 1 \text{ fm}$ ⁹ ed è circa 100 volte più intensa di quella elettromagnetica (repulsiva). Consideriamo due protoni inizialmente ad una distanza r talmente elevata (rispetto alle dimensioni di un protone) da poter porre formalmente $r \sim \infty$. Immaginiamo che il secondo protone, dotato di energia iniziale (totalmente cinetica) E_i , si diriga verso il primo protone

⁸ In verità il ciclo protone-protone che produce l'elio è alquanto complesso e si realizza attraverso diversi passaggi. Essendo interessati in particolare all'effetto tunnel, noi qui ci soffermiamo unicamente sul primo passaggio in cui due protoni (H) si uniscono a formare deuterio (²H). Tuttavia, alle reazioni nucleari sono state dedicate due Spigolature (n. 2 del 2006 e n. 2 del 2023) a cui rimandiamo il lettore interessato.

⁹ $1 \text{ fm} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$, dove fm sta per l'unità di misura "fermi".

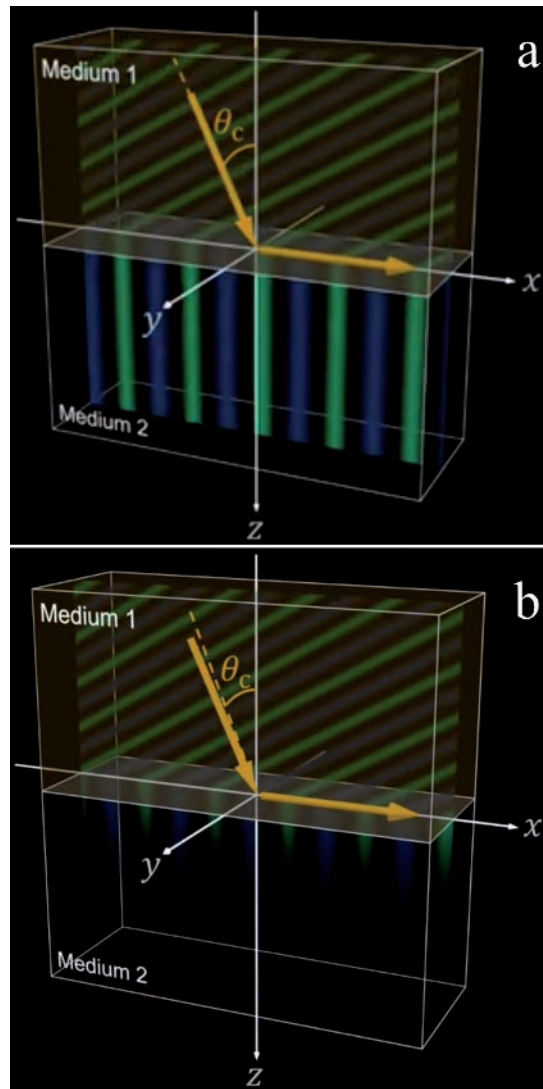


FIG. 10. a) Quando l'angolo di incidenza è uguale a quello critico ($\theta_1 = \theta_c$) l'onda rifratta scorre parallelamente alla superficie di contatto mentre le creste e le gole sono perpendicolari ad essa. b) Se $\theta_1 > \theta_c$ non vi è più rifrazione, ma una piccola "appendice" delle linee verdi e blu si protrude comunque nel mezzo 2 con un'estensione dell'ordine della lunghezza d'onda della radiazione (si veda il testo).

(posto a $r = 0$);¹⁰ esso rallenta continuamente (per via della repulsione) e la distanza diminuisce sempre più fino ad un valore minimo r_m (FIG. 11). Se $r_m > r_n$ la velocità si annullerà per un istante in r_m per poi invertire la sua direzione a causa della repulsione coulombiana tra le due particelle e non si realizzerà alcuna fusione. Se invece $r_m < r_n$ il secondo protone cadrà nel raggio di azione della forza nucleare del primo (e viceversa); essendo questa forza molto superiore a quella di Coulomb, l'attrazione supererà la repulsione e le due particelle potranno unirsi (FIG. 11).

¹⁰ Questa frase è imprecisa perché suggerisce che un primo protone rimane fermo mentre l'altro gli si avvicina. In realtà entrambi i protoni si respingono allontanandosi l'uno dall'altro. Tuttavia, la descrizione nel testo è di più facile comprensione e non introduce rilevanti errori quantitativi in alcuni dei valori numerici riportati.

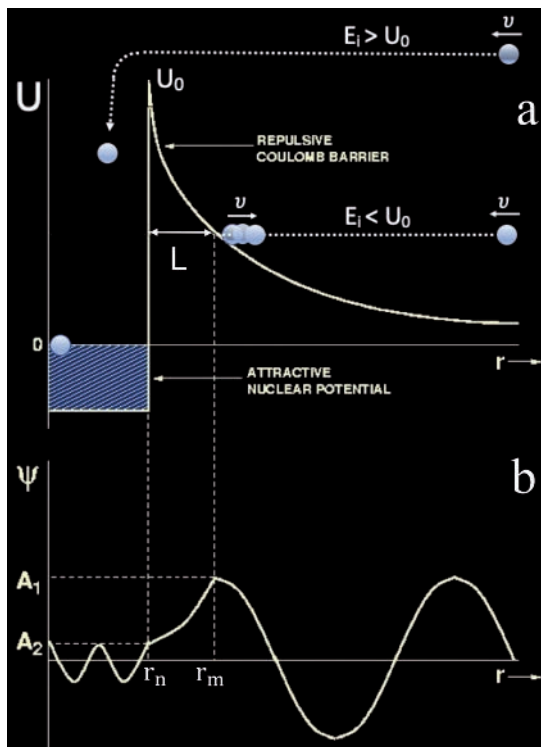


FIG. 11. a) Uno schema dell'energia potenziale U (ossia l'energia che un protone deve avere per avvicinare un altro protone). A grandi distanze prevale la repulsione coulombiana: la linea punteggiata inferiore mostra un protone che, partito da lontano con un'energia $E_i = K$ (dove E_i è l'energia totale e K quella cinetica), rallenta sempre più fino a fermarsi in r_m (dove la sua energia si è totalmente trasformata in energia potenziale $U(r_m) = k/r_m$) e per poi "rimbalzare" indietro. b) Lo schema inferiore rappresenta la stessa cosa di quello superiore, ma da un punto di vista quantistico. La funzione d'onda associata ad un elettrone con $E_i = U_0$ oscilla alla destra e alla sinistra della barriera e decade esponenzialmente al suo interno. L'ampiezza dell'onda nella buca di potenziale nucleare indica che la probabilità per il secondo protone di stabilirvisi è piccola ma non nulla, e la fusione è dunque possibile.

Per comprendere il ruolo cruciale dell'effetto tunnel è necessario trasformare i vincoli sulle distanze appena esposti in vincoli sulle energie, analogamente a quanto abbiamo fatto nell'esempio del pallone descritto nel livello base. Mentre in quell'esempio la forza di gravità è stata assunta indipendente dalla posizione, nel caso dei due protoni dobbiamo tenere conto della dipendenza da r della forza di Coulomb, e il calcolo dell'energia potenziale risulta un poco più complicato.

La forza di Coulomb tra le due protoni è $F = q^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2) \equiv k/r^2$ dove q è la carica del protone, ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto e $k \equiv q^2 / (4\pi\epsilon_0) = 2,31 \times 10^{-28} \text{ N}\cdot\text{m}^2$. In base ad un semplice calcolo integrale (che omettiamo) l'energia potenziale risulta essere $U(r) = k/r$, ed avere, quindi, un andamento radiale iperbolico, come illustrato in FIG. 11a. Tale andamento si interrompe in r_n , dove si impone la forza forte che, essendo attrattiva, ha

un'energia potenziale negativa; nell'intervallo $0 < r \leq r_n$ si forma una sorta di "pozzo" in fondo al quale due protoni possono fondersi. Il profilo complessivo dell'energia potenziale mostra dunque un picco $U_0 = k/r_n$.

Consideriamo ora il moto del secondo protone verso il primo. Inizialmente, essendo a grande distanza, sarà sostanzialmente privo di energia potenziale e la sua energia sarà totalmente cinetica: $E_i = K$. Come nell'esempio del pallone illustrato all'inizio del livello base, nel corso del suo avvicinamento il protone mantiene costante la sua energia iniziale ma acquisisce energia potenziale a spese dell'energia cinetica: $E_i = K + U$. Come mostrato in FIG. 11a, se $E_i < U_0$ il protone procede fino ad incontrare la barriera potenziale in r_m ; qui $K = 0$ perché l'energia si è interamente trasformata in energia potenziale $U(r_m) = k/r_m$. Successivamente il protone si allontana trasformando di nuovo la sua energia potenziale in energia cinetica; in questo caso la fusione non avviene. Se invece $E_i > U_0$ il protone riesce a scavalcare la barriera e cadere nel pozzo dando luogo alla fusione.

Utilizziamo ora qualche numero per rendere quantitativo quanto esposto finora e capire quel che realmente succede nel centro del Sole. Qui la temperatura¹¹ è $T = 15 \times 10^6 \text{ K}$ e dalla termodinamica statistica sappiamo che, per via dell'agitazione termica, l'energia cinetica di una particella è data da $K = 1,5\kappa T$, dove $\kappa = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ è la costante di Boltzmann. Pertanto l'energia iniziale del protone è pari a $E_i = K = 3,11 \times 10^{-16} \text{ J}$ e va confrontata con il valore del picco della barriera di energia potenziale $U_0 = 2,31 \times 10^{-13} \text{ J}$. Dunque, mediamente l'energia dei protoni è circa 300 volte inferiore al picco della barriera e la fusione, con annessa produzione di energia, risulta inibita. Naturalmente questa conclusione – basata sulla fisica classica – è palesemente sbagliata, come ci rendiamo conto quotidianamente.

Ma ormai abbiamo già capito che la soluzione al problema appena esposto è data dalla meccanica quantistica e, in particolare, dall'effetto tunnel. Come mostrato in FIG. 11b, la funzione d'onda Ψ associata alla particella in arrivo con $E_i < U_0$ può superare la barriera tramite una coda esponenziale che, una volta "sbucata" dal lato opposto, torna ad oscillare sia pure con ampiezza ridotta. Questo significa che la probabilità che il protone si ritrovi effettivamente nel pozzo per potere dare luogo alla fusione è alquanto bassa. Per calcolare tale probabilità proviamo a utilizzare l'eq. (3) non prima di aver calcolato lo spessore della barriera $L = r_m - r_n$. In r_m il valore dell'energia potenziale è pari a $E_i = k/r_m$, per cui otteniamo $L = (U_0/E_i - 1)r_n = 7,41 \times 10^{-13} \text{ m}$.

¹¹ La scala termometrica Kelvin è uguale a quella Celsius ma "sfasata" di 273 gradi (p.e., $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$).

Utilizzando i valori calcolati più sopra per valutare la probabilità che si realizzi l'effetto tunnel [eq. (3)] otteniamo $P \approx 0$, ossia il risultato classico! Il punto è che abbiamo assunto che tutti i protoni abbiano un'energia pari al valor medio, mentre in realtà essi sono ripartiti in energia secondo la distribuzione di Boltzmann $\exp(-E/kT)$ (si veda il n. 1 del 2021) per cui i protoni più energetici sono meno numerosi, e viceversa. Con riferimento alla FIG. 11a, i protoni con maggiore E_i seguono una traiettoria "alta" che li porta ad avere a che fare con valori di $(U_0 - E_i)$ relativamente bassi e spessori L della barriera alquanto sottili. Entrambi questi fattori contribuiscono ad aumentare la probabilità P data dall'eq. (3). Riassumendo, ab-

biamo pochi protoni con alto P e, gradatamente, sempre più protoni con basso P . Il calcolo di P medio che tenga conto di questi fattori è alquanto complesso e non lo riportiamo; riportiamo però il risultato finale pari a $P \sim 10^{-9}$. In altre parole, solo uno scontro su un miliardo può effettivamente dare vita ad una reazione di fusione.¹² Nonostante questo dato possa apparire basso, grazie all'enorme numero di protoni ($\sim 10^{56}$) contenuti nel suo nucleo il Sole ha potuto brillare durante gli scorsi $4,5 \times 10^9$ anni e continuerà a farlo per un analogo lasso di tempo.

¹² In realtà questo numero è ulteriormente ridotto da altri fattori non dovuti all'effetto tunnel e su cui, pertanto, non ci soffermiamo.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF - Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.