

## Meccanica quantistica: particelle, onde o ... qualcos'altro

Annibale D'Ercole

CHRISTIAN HUYGENS (1629-1695) è stato il primo a descrivere la luce come propagazione di onde, mentre Isaac Newton (1642-1727) riteneva che essa fosse composta da particelle. Per confrontare le due teorie Thomas Young (1773-1829) realizzò nel 1801 il celeberrimo esperimento delle due fenditure da cui risultò che la luce ha una natura ondulatoria a causa della formazione di *frange di interferenza*, strutture che si creano a seguito dell'interazione tra onde (FIG. 1).

Questa conclusione venne successivamente rafforzata da James Maxwell (1831-1879) con la sua formulazione delle equazioni che descrivono la luce come un'onda elettromagnetica che viaggia a velocità  $c = \lambda\nu \approx 3 \times 10^8$ , dove  $\lambda$  e  $\nu$  sono, rispettivamente, la lunghezza d'onda e la frequenza di oscillazione dell'onda (FIG. 2). Tutto questo sembrò porre una pietra tombale sulla questione, ma di lì a poco si vide che non era così.

Alla fine del XIX secolo, infatti, il problema del corpo nero mise in luce i limiti della fisica classica e pose le basi per la rivoluzione quantistica. Il corpo nero è un oggetto ideale in grado di assorbire tutta la radiazione incidente senza rifletterla.<sup>1</sup> Esso emette

\* Questa rubrica – iniziata nel 1999 e che con questa puntata ha raggiunto i novanta numeri – si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi “fondamenti di astronomia”, volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

<sup>1</sup> Un oggetto ci appare rosso perché assorbe la radiazione solare di tutte le lunghezze d'onda tranne quella corrispondente al rosso che viene riflessa verso il nostro occhio. Il colore rosso è quindi l'effetto di uno squilibrio del corpo nell'assorbimento della radiazione.

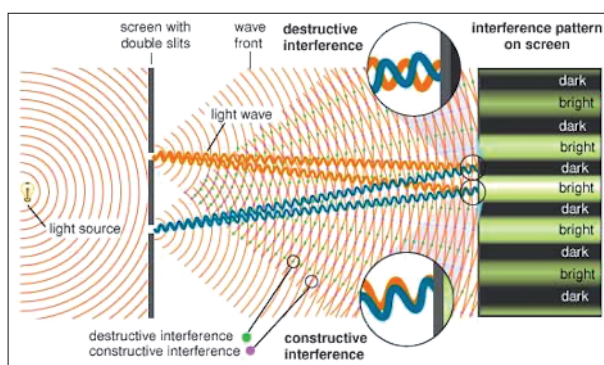


FIG. 1. L'esperimento di Young. Un fronte di onde luminose monocromatiche (cioè tutte con la stessa lunghezza d'onda  $\lambda$ ) colpisce un diaframma dotato di due fenditure parallele. Le due porzioni del fronte che attraversano le fenditure si propagano circolarmente ed interferiscono tra loro mentre si espandono. Questo significa che vi sono punti in cui il massimo di un'onda si sovrappone al massimo dell'altra, per cui si verifica il massimo di ampiezza di oscillazione (doppia rispetto all'ampiezza originale), e vi sono punti in cui si sovrappongono i due minimi. In entrambi i casi si parla di *interferenza costruttiva*. Dal momento che l'intensità della luce dipende dal quadrato dell'ampiezza di oscillazione, in questi punti si ottiene la massima intensità. Vi sono poi punti in cui si realizza l'*interferenza distruttiva* in cui il massimo di un'onda si sovrappone al minimo dell'altra annullandosi reciprocamente ed inibendo quindi qualunque oscillazione e dando luogo ad un'intensità nulla. Ci sono inoltre *interferenze intermedie* che danno luogo a intensità intermedie. Ponendo una lastra fotografica ad una certa distanza dietro il diaframma, si ottiene su di essa un'alternanza di strisce più o meno chiare e scure in corrispondenza dei punti in cui si verificano interferenze di vario tipo.

te anche una radiazione il cui spettro (cioè la distribuzione di energia emessa ad ogni lunghezza d'onda  $\lambda$ ) è universale, ossia dipende solo dalla temperatura del corpo ma non dal materiale di cui è composto. Il calcolo di questo spettro tramite la fisica classica porta alla legge di Rayleigh-Jeans che, come si vede in FIG. 3, produce un effetto chiaramente irrealistico, ossia la cosiddetta *catastrofe ultravioletta*: l'emissione tende ad infinito per  $\lambda$  che tende a zero. Nell'anno 1900 Max Planck (1858-1947, Nobel nel 1918), mostrò che lo spettro poteva essere riprodotto correttamente (FIG. 3) ipotizzando che i pro-

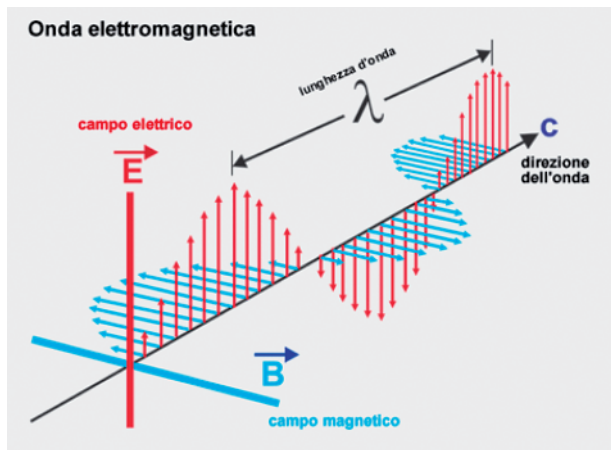


FIG. 2. Onda elettromagnetica. Le oscillazioni del campo elettrico sono indicate dalle frecce (vettori) rosse e quelle del campo magnetico dalle frecce (vettori) azzurre. Le oscillazioni dei due campi sono ortogonali tra loro e ortogonali alla direzione del moto lungo cui si muovono. Si definisce *periodo*  $T$  il doppio del tempo impiegato dal campo elettrico (o magnetico) per oscillare dal valore massimo (detto *ampiezza* o *cresta*) in una direzione fino al valore massimo in direzione opposta. La *frequenza*  $\nu = 1/T$  indica il numero di queste oscillazioni nell'unità di tempo. La lunghezza d'onda  $\lambda$  è la distanza tra due ampiezze consecutive.

cessi di assorbimento ed emissione da parte degli atomi non avvengano in maniera continua (come sembra accadere nel mondo macroscopico, p.e. nelle antenne dei telefonini e dei televisori) ma quantizzata,<sup>2</sup> ossia tramite quantità di energia pari o multiple di

$$E = h\nu, \quad (1)$$

dove  $h$  ( $= 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ) è la costante di Planck.

Ma nello stesso periodo, la fine del XIX secolo, vi era anche un altro fenomeno coinvolgente la radiazione che rappresentava un rompicapo per i fisici. Si trattava dell'*effetto fotoelettrico*, analizzato da più studiosi, tra cui, nel 1888, l'italiano Augusto Righi. Questo effetto consiste nell'emissione di elettroni (detti *fotonelettroni*) causata dall'incidenza della luce su una superficie metallica (a questo argomento abbiamo dedicato le *Spigolature* del n. 2 del 2001; qui ci limitiamo a richiamare i concetti basilari). La teoria ondulatoria classica della luce prevede che la sua intensità  $I$  è tanto maggiore quanto maggiore è l'ampiezza dell'oscillazione<sup>3</sup> (in particolare,  $I \propto E_0^2$ , dove

<sup>2</sup> La seguente metafora aiuta a capire l'ipotesi di Planck. Possiamo riempire (o svuotare) una piscina "in maniera classica" tramite una pompa che versa (o aspira) acqua in maniera continua. Secondo Planck, invece, il riempimento (o svuotamento) può avvenire solo in maniera "quantizzata" tramite secchi contenenti una predefinita quantità d'acqua. È tuttavia importante sottolineare che l'acqua nella piscina mantiene la sua natura "classica" di fluido continuo. Fuor di metafora, questo significa che, per Planck, la radiazione nello spazio continua ad avere la sua classica struttura ondulatoria. Solo i processi di assorbimento ed emissione da parte della materia sono quantizzati.

<sup>3</sup> Questa affermazione può essere compresa con la seguente analogia. La violenza con cui le onde si abbattono durante una mareggiata è tanto maggiore quanto più sono alte le onde (ossia quanto maggiore è la loro ampiezza).

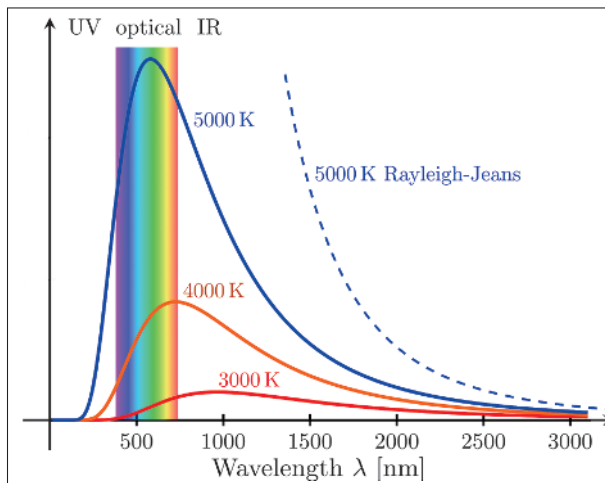


FIG. 3. Spettro di un corpo nero con in ascissa le lunghezze d'onda (in nanometri, ossia miliardesimi di metro) e in ordinata la potenza emessa (in unità arbitrarie) ad ogni lunghezza d'onda  $\lambda$ . Lo spettro calcolato classicamente dà luogo alla curva di Rayleigh-Jeans che, come si vede, tende ad infinito per lunghezze d'onda  $\lambda$  sempre più corte, dando luogo alla catastrofe ultravioletta. La curva di Planck, invece, tende a zero sia per  $\lambda \rightarrow 0$  che per  $\lambda \rightarrow \infty$ ; pertanto, l'emissione totale è una quantità finita. Si noti che la curva si alza all'aumentare della temperatura del corpo. In particolare, per una temperatura di 5000 gradi (non dissimile dai 5700 gradi della superficie solare il cui spettro è simile a quello di un corpo nero) il massimo della radiazione cade nella regione del visibile (striscia colorata). Le temperature sono date in gradi Kelvin K e non Celsius C. Le due scale sono uguali ma "sfalsate" di 273 gradi per cui, ad esempio, il ghiaccio fonde a 273 K e l'acqua bolle (a livello del mare) a 373 K.

$E_0$  è l'ampiezza del campo elettrico dell'onda); questo porta a modalità di estrazione dei fotonelettroni opposte a ciò che si osserva (si veda la didascalia di FIG. 4).

Per risolvere questo problema, nel 1905 Einstein si spinse oltre Planck sostenendo che la quantizzazione non riguarda solo i processi di emissione e assorbimento ma è inerente alla natura stessa della radiazione che è composta da singoli pacchetti o quanti di luce (battezzati successivamente *fotoni*) localizzati in un piccolo volume spaziale. I fotoni viaggiano con velocità  $c$  e hanno un'energia legata alla frequenza della radiazione secondo la relazione  $E = h\nu$ . Dunque un fascio di radiazione monocromatica è composto da fotoni di stessa energia che vanno a colpire gli elettroni del metallo fornendo loro una determinata velocità. Aumentare l'intensità del fascio implica un aumento dei fotoni e conseguentemente dei fotonelettroni che però acquisiscono sempre la stessa velocità perché i singoli proiettili (ossia i fotoni) mantengono la stessa energia. Inoltre fotoni con frequenza maggiore, essendo più energetici, comunicano ai fotonelettroni velocità maggiori. L'ipotesi di Einstein descrive ogni aspetto dell'effetto fotoelettrico e valse all'autore il premio Nobel nel 1921.

Ma come può un fascio di fotoni spiegare l'esperimento di Young? Ci si aspetterebbe, infatti, che ogni fotone che non si "infrange" sul diaframma e riesce a passare attraverso una delle due fessure pro-

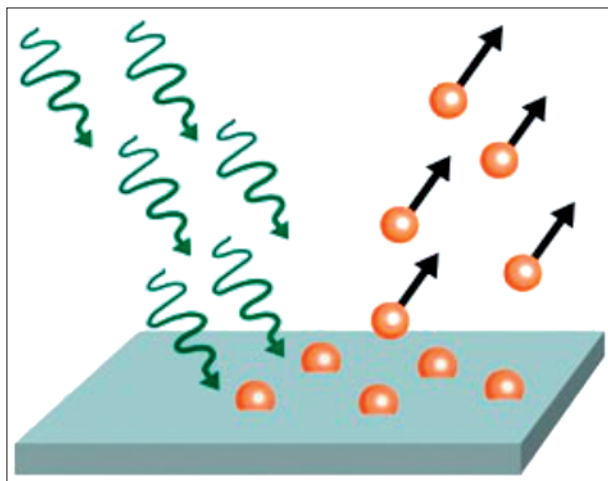


FIG. 4. Rappresentazione schematica dell'effetto fotoelettrico. In base alla teoria classica, l'intensità del fascio luminoso monocromatico è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda elettromagnetica: pertanto, maggiore è l'ampiezza, più forte è il "calcio" che questa dà all'elettrone estratto dalla superficie metallica (indicato come una sferetta gialla con una freccia nera rappresentante la sua velocità) e maggiore è l'energia cinetica di quest'ultimo. Inoltre, dato che  $\lambda$  non cambia con l'intensità, il numero di creste (e i relativi calci) che giungono sul metallo nell'unità di tempo è sempre lo stesso. Quindi ci si aspetta che un incremento dell'intensità luminosa non cambi il numero di fotoelettroni ma produca un aumento della loro energia. Il numero dei fotoelettroni dovrebbe invece aumentare riducendo la  $\lambda$  (ossia aumentando  $\nu$ ) della luce perché in questo caso le creste sono più ravvicinate e il numero di "calci" per unità di tempo aumenta. In realtà si osserva l'esatto contrario: l'intensità della radiazione aumenta il numero dei fotoelettroni senza cambiarne l'energia. Quest'ultima aumenta all'aumentare della frequenza. Il problema venne risolto da Einstein con l'introduzione dei quanti di luce (indicati dalle frecce ondulate verdi) come riportato nel testo.

segua la sua traiettoria rettilinea fino a lasciare una macchiolina nera nel punto in cui colpisce la lastra fotografica. Nel complesso, quindi, ci attenderemo la formazione di due strisce nere ad immagine delle due fenditure (FIG. 5a) e non la figura di interferenza che invece si osserva (FIG. 5b). Per fugare il dubbio che durante il loro viaggio dalle fenditure alla lastra i fotoni interagiscano tra loro in qualche modo – sia pure sconosciuto – si può replicare l'esperimento utilizzando una sorgente così debole da emettere un fotone alla volta (il fotone successivo viene emesso dopo che quello precedente ha già colpito la lastra). Quello che si osserva è che ogni singolo fotone raggiunge lo schermo in una posizione apparentemente casuale, ma puntino dopo puntino si torna a formare la figura di interferenza (FIG. 6). Dunque si pone il problema di capire se e come un singolo fotone possa interferire con quelli precedenti e/o successivi, oppure con sé stesso. Richard Feynman (1918-1988, Nobel per i suoi lavori sull'elettrodinamica quantistica nel 1965) nelle sue *Lezioni di Fisica* ha scritto che questo esperimento «... sta al cuore della meccanica quantistica. In realtà ne contiene l'unico mistero».<sup>4</sup>

<sup>4</sup> L'esperimento di Young implica aspetti ancora più sorprendenti di quelli qui descritti e vi abbiamo dedicato le *Spigolature* nel n. 4 del 2008.

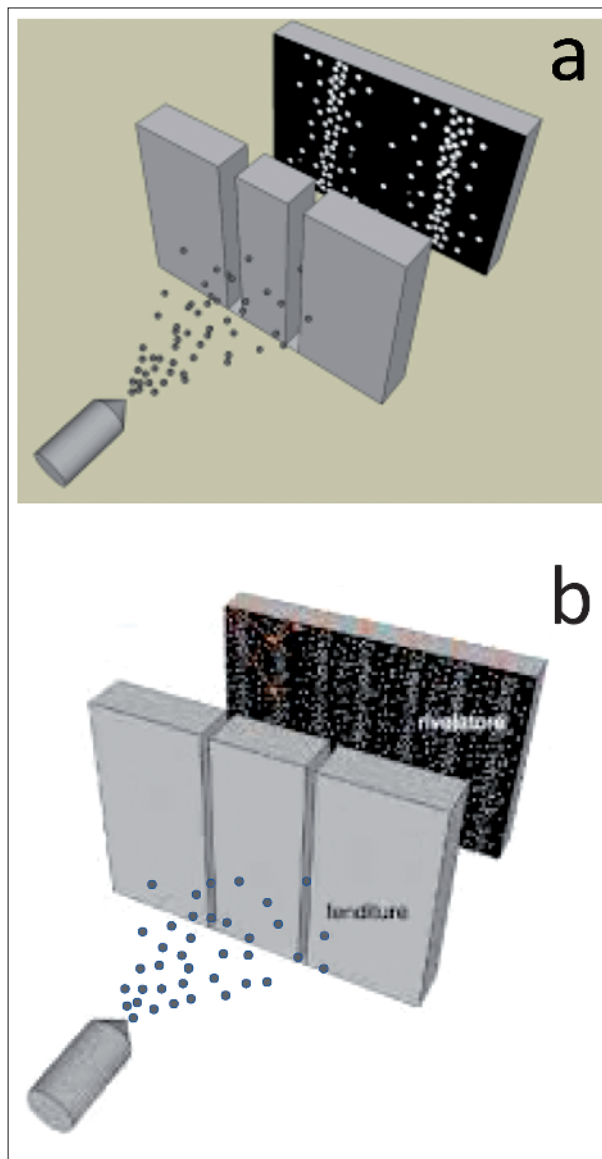


FIG. 5. Esperimento di Young illustrato in termini di fotoni. a) Classicamente ci si attende che i fotoni che riescono ad attraversare le fenditure proseguano lungo una traiettoria rettilinea formando due strisce sulla lastra. b) Al contrario, come sappiamo, si forma una figura di interferenza.

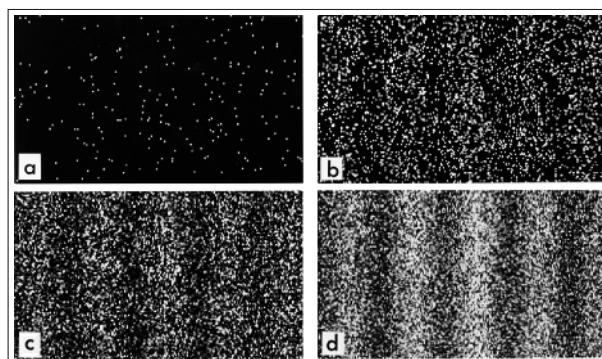


FIG. 6. Esperimento di Young. Realizzazione di una figura di interferenza mediante l'emissione di un fotone alla volta. Il numero dei fotoni è 200 (a), 6000 (b), 40.000 (c), 140.000 (d).

Il mistero si infittì ulteriormente quando, nel 1924, Louis de Broglie (1892-1987, Nobel nel 1929) propose nella sua tesi di dottorato un'ipotesi ancora

più estrema di quella di Einstein.<sup>5</sup> Se un processo tipicamente ondulatorio come la luce mostra anche proprietà corpuscolari, allora in determinate condizioni le particelle possono mostrare proprietà ondulatorie. Posto  $p = E/c$  la quantità di moto di un fotone<sup>6</sup> e  $E = h\nu$  la sua energia otteniamo  $p = h\nu/c = h/\lambda$ .

Per analogia, de Broglie attribuì ad una particella di massa  $m$ , quantità di moto  $p = mv$  ed energia  $E = 0.5 mv^2$  una lunghezza d'onda tramite la sequenza

$$E = 0.5mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2\nu^2}{2mc^2} = \frac{h^2c^2}{2mc^2\lambda^2} \quad (2)$$

da cui<sup>7</sup>

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (3)$$

In effetti, se ripetiamo l'esperimento della doppia fenditura utilizzando elettroni, otteniamo sulla lastra le stesse figure di interferenza che compaiono utilizzando la luce, anche "sparando" un elettrone alla volta. L'ipotesi di de Broglie venne verificata sperimentalmente nel 1927, mostrando così che nel mondo atomico e subatomico quantità considerate onde oppure particelle mostravano tutto lo stesso comportamento *duale* onda-particella.<sup>8</sup>

Secondo la cosiddetta interpretazione di Copenaghen<sup>9</sup> – principalmente dovuta a Niels Bohr (1885-1962, Nobel nel 1922) che nella capitale danese visse ed operò – la meccanica quantistica non può dire nulla sulla traiettoria delle particelle. In analogia a quanto accade per il fotone associato ad un'onda elettromagnetica, e seguendo l'ipotesi di de Broglie, una particella è rappresentata (matematicamente) come un'onda tramite la *funzione d'onda*  $\Psi(x, t)$ , dove  $x$  è la posizione nello spazio e  $t$  è il tempo (si veda il livello avanzato). E sempre in analogia con l'onda luminosa la cui intensità in un punto (ossia la probabilità di trovare fotoni in quel punto) è proporzio-

nale al quadrato della sua ampiezza, la probabilità di trovare la particella in una certa posizione  $x$  è data dal quadrato della funzione d'onda,  $\Psi(x, t)^2$  (si veda il livello avanzato).

Pertanto, tornando all'esperimento di Young, possiamo avere, ad esempio, la probabilità del 60% che l'elettrone colpisca un determinato punto della lastra; questo significa che ripetendo lo stesso esperimento con la stessa particella nelle stesse condizioni la troveremo il 60% delle volte in quel punto, ma nel restante 40% in altre posizioni secondo la sua distribuzione di probabilità. Facendo appello all'immaginazione e ricorrendo al linguaggio comune (che mal si adegua alla meccanica quantistica) possiamo dire che la funzione d'onda rappresenta, per così dire, un elettrone "diffuso" spazialmente con diversi valori di probabilità di trovarsi in punto o in un altro. Al pari dell'onda luminosa, l'onda di probabilità attraversa entrambe le fessure per poi creare delle interferenze costruttive (dove la probabilità è maggiore) e distruttive (dove la probabilità è nulla).

Si noti che fintanto che l'elettrone è "in viaggio" verso lo schermo mantiene la caratteristica di essere spazialmente "diffuso". Tuttavia, nel momento in cui interagisce con l'apparato di misura (nel nostro caso la lastra) esso perde le sue proprietà ondulatorie e acquisisce quelle particellari lasciando come traccia una piccola macchiolina in un punto bel preciso della lastra. A questo punto la funzione d'onda non ha più senso e, in gergo tecnico, si dice che "collassa". Questo ha portato Bohr ad enunciare il *principio di complementarità* secondo cui l'aspetto ondulatorio e quello particellare non si verificano mai contemporaneamente ma, a seconda delle condizioni, l'uno esclude l'altro.

Onda e particella sono concetti incompatibili (la prima occupa un'estesa regione di spazio, mentre la seconda è puntiforme) e non possono definire la stessa entità anche se a volte (a seconda dei casi) una descrizione (matematica) prettamente particellare oppure ondulatoria può risultare utile nel descrivere un particolare fenomeno in modo sorprendentemente esatto. Come scrive Feynman nelle sue *Lezioni*:

L'elettrone non si comporta in nessuno dei due modi ... non è né l'una né l'altra cosa ... Il comportamento quantistico degli oggetti atomici (elettroni, protoni, neutroni e così via) è lo stesso per tutti, sono tutti "onde-particelle", o qualunque altro nome vi piaccia dar loro.

Per cercare di rendere meno ostico questo punto, riportiamo la metafora del cilindro (FIG. 7) proposta dal fisico francese Jean-Marc Lévy-Leblond (1940-). Si paragona l'oggetto quantistico a un cilindro che, a seconda di come lo si osserva, può essere ricondotto a un quadrato o a un cerchio, senza avere le loro proprietà ma possedendone altre non condivise dal quadrato e dal cerchio. Questa analogia, come tutte le analogie, ha i suoi limiti. In FIG. 7 noi possiamo osservare l'oggetto – il cilindro – che,

<sup>5</sup> L'ipotesi apparve talmente audace alla commissione di dottorato da indurre quest'ultima a chiedere un'opinione ad Einstein che diede il suo assenso.

<sup>6</sup> Una particella di massa  $m$  non relativistica (che si muove, cioè, con una velocità  $v \ll c$ ) possiede un'energia (cinetica)  $E = 0.5 mv^2$  e una quantità di moto  $p = mv$ . Combinando queste due equazioni otteniamo  $p = 2E/v$ . Per un fotone vale la formula un poco diversa per gli effetti relativistici:  $p = E/v$ . Per semplicità, nell'eq. (2) sono stati utilizzati termini classici, ma la conclusione – eq. (3) – è valida anche in caso relativistico a patto, ovviamente, di utilizzare per  $p$  la sua espressione relativistica di cui però non ci occupiamo in questa sede.

<sup>7</sup> L'eq. (3) non ha senso per una particella con  $p = 0$ , ma, come vedremo nel livello avanzato, per via del principio di indeterminazione le particelle non possono "restare ferme".

<sup>8</sup> Ci si può chiedere come mai, se ha ragione de Broglie, gli oggetti non vibrino. Una palla di tennis di massa  $m = 0,055$  kg, lanciata ad una velocità di 35 m/s, ha  $\lambda = 3,44 \times 10^{-34}$  m, del tutto trascurabile rispetto al suo diametro  $D \sim 0,07$  m, e può essere trattata secondo la fisica classica. Un elettrone (di massa  $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg) che si muove all'interno dell'atomo di idrogeno con una velocità di  $2 \times 10^6$  m/s ha  $\lambda = 3,63 \times 10^{-10}$  m, paragonabile al suo raggio orbitale  $r \sim 10^{-10}$  m; in questo caso il suo aspetto ondulatorio ha importanti conseguenze che non possiamo discutere in questa nota.

<sup>9</sup> L'interpretazione di Copenaghen è stata la prima e ancora oggi la più diffusa interpretazione dei comportamenti quantistici. Non mancano tuttavia interpretazioni alternative su cui è impossibile dilungarci in questa sede.

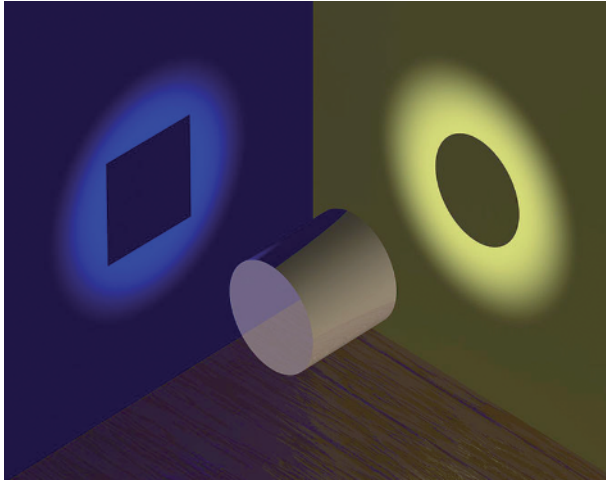


FIG. 7. Metafora della misteriosa natura delle entità quantistiche: un cilindro che può dare luogo ad un cerchio o a un quadrato a seconda della proiezione utilizzata.

pur manifestandosi in due modi diversi, può comunque essere visto per “com’è fatto veramente”. Al contrario, l’oggetto quantistico, p.e. un elettrone, rimane inaccessibile e ne possiamo indagare solo le contraddittorie manifestazioni ondulatorie o corpuscolari.

In conclusione, è necessario operare un cambio di paradigma. Chiedersi come è fatto un elettrone (o altre particelle) è una domanda sbagliata (frutto delle categorie mentali derivanti dalla fisica classica). La fisica si occupa solo di grandezze osservabili e misurabili. Non è possibile osservare un elettrone allo stesso modo con cui si osserva un oggetto macroscopico, ma è possibile misurare le sue interazioni con l’ambiente circostante e la meccanica quantistica tratta queste interazioni. Nonostante la sua natura statistica la meccanica quantistica ha prodotto previsioni in ineguagliabile accordo con gli esperimenti.

Se il lettore si sente frastornato da quanto esposto fin qui, riportiamo a consolazione sua (e anche di chi scrive) la nota affermazione di Richard Feynman:

Penso di poter affermare tranquillamente che nessuno capisce la meccanica quantistica.

La matematica utilizzata in meccanica quantistica è estremamente complessa e assolutamente al di là della portata di queste pagine. Noi qui ci limiteremo ad esporre alcune proprietà dei fenomeni ondulatori classici utilizzando formule estremamente semplificate. Nonostante questo, riteniamo che quanto andiamo ad esporre possa comunque dare un’idea di “come si ragiona” in meccanica quantistica. In particolare, descriveremo il famoso principio di indeterminazione.

La FIG. 8 mostra un’“istantanea” di un’onda sinusoidale che si sviluppa lungo l’asse  $x$  e si muove

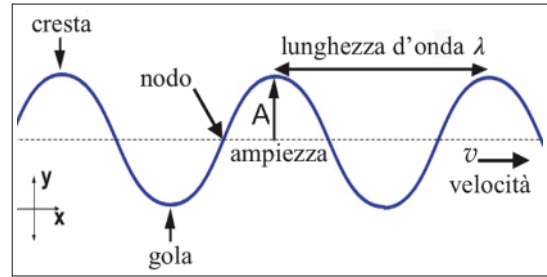


FIG. 8. Schema di un’onda piana sinusoidale. Sono indicate l’ampiezza  $A$ , le creste, le gole, la lunghezza d’onda  $\lambda$  e la velocità di propagazione  $v$ .

verso le  $x$  crescenti con velocità  $v$  (e le cui caratteristiche sono evidenti dalla figura stessa). Essa può essere scritta come

$$y(x) = A \cos(kx - \omega t) \quad (4)$$

dove  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\omega = 2\pi\nu$  e  $\nu = 1/T$ . Definendo il periodo  $T$  come il tempo necessario ad una cresta per raggiungere la posizione della cresta che la precede, si ha  $T = \lambda/v$ . Riordinando i termini otteniamo  $\lambda\nu = v$ , ossia la relazione utilizzata nel livello base. Nel prosieguo, comunque, ci limiteremo alla sola parte spaziale; questo semplifica i calcoli e non compromette le argomentazioni che verranno.

Approfondiamo ora il concetto di interferenza così largamente utilizzato nel livello base. In FIG. 9 sono mostrati alcuni esempi di interferenza tra due onde. I primi due sono banali e sono spiegati nella didascalia della figura. Il terzo, invece, è più interessante. Consideriamo due onde di pari ampiezza (sebbene questa ipotesi non sia necessaria) ma di diversa lunghezza d’onda:  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . La loro somma è dunque

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A[\cos(k_1 x) + \cos(k_2 x)] \\ &= 2A \left[ \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x\right) \cos(\bar{k} x) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Il secondo passaggio è stato ottenuto tramite la formula di prostaferesi, con  $\Delta k = k_2 - k_1$  e  $\bar{k} = 0,5(k_1 + k_2)$ .

Se i due valori  $k$  di sono molto vicini il secondo termine cosinusoidale risulta avere una lunghezza d’onda assai simile a quelle delle onde originali [linea nera in FIG. 9]. Il primo termine ha invece una lunghezza d’onda maggiore, pari a  $\lambda_c = 4\pi/\Delta k$ ;<sup>10</sup> esso varia più lentamente (linea punteggiata/tratteggiata) e può essere considerato come un’ampiezza oscillante del secondo termine.<sup>11</sup> La  $\Psi(x)$  si svolge infatti tra la linea tratteggiata e punteggiata

<sup>10</sup> Similmente all’eq. (4), nel termine cosinusoidale dell’eq. (5) la  $x$  va moltiplicata per  $2\pi/\lambda_c$ . Abbiamo dunque  $\Delta k/2 = 2\pi/\lambda_c$ , da cui otteniamo l’espressione di  $\lambda_c$  riportata nel testo.

<sup>11</sup> In acustica questo fenomeno viene detto battimento e consiste in un suono la cui intensità varia periodicamente. È possibile trovare esempi sonori in rete.

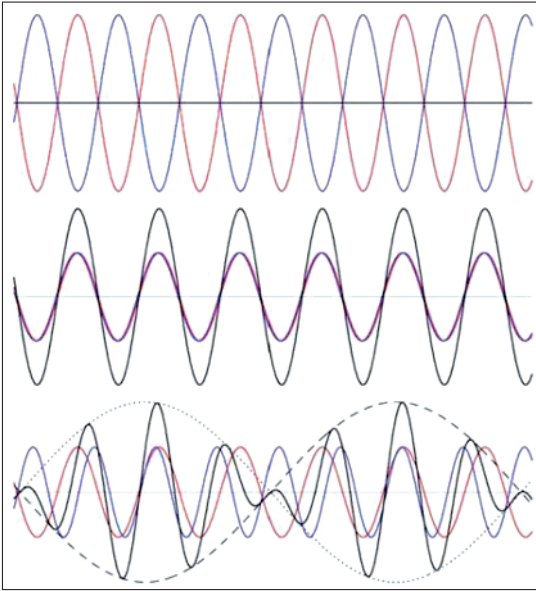


FIG. 9. Semplici esempi di interferenza. Nel diagramma in alto due onde di pari ampiezza e lunghezza d'onda (le due curve rosse e blu) sono sfasate in maniera tale che le creste di una si trovano in corrispondenza delle gole dell'altra. Si verifica allora un'interferenza distruttiva e l'onda risultante (data dalla somma algebrica delle due) indicata dalla linea nera ha ampiezza nulla. Nello schema intermedio le due onde sono in fase, ossia le loro ampiezze coincidono spazialmente. In questo caso l'interferenza costruttiva dà luogo ad un'oscillazione di pari lunghezza d'onda ma di ampiezza doppia. L'ultimo diagramma illustra l'interferenza tra due onde di pari ampiezza ma le cui lunghezze d'onda sono leggermente diverse (si veda il testo).

e ricorda una sorta di treno i cui "vagoni" sono composti da pacchetti d'onda oscillanti la cui estensione  $\Delta x$  è pari alla distanza tra due nodi consecutivi del coseno:  $\Delta x = \lambda_c / 2 = 2 \pi / \Delta k$ , da cui otteniamo la relazione (assai importante, come vedremo)

$$\Delta x \Delta k = 2 \pi. \quad (6)$$

Osservando il terzo grafico in FIG. 9 è difficile sfuggire alla suggestione di interpretarlo come una sequenza di pacchetti di radiazione, ossia di fotoni, che danno luogo a un raggio luminoso.

Veniamo ora all'equazione di de Broglie [eq. (3)]: un elettrone libero dotato di un ben preciso impulso  $p$  è associato ad un'onda piana di fissata  $\lambda$ . Quest'onda si estende per tutto lo spazio, pertanto la probabilità di trovare l'elettrone è la stessa ovunque o, in altre parole, non sappiamo dov'è. Ma la nostra idea di particella ci porta a pensare che la probabilità di trovarla sia confinata in un intervallo  $\Delta x$ , fuori dal quale tale probabilità è scarsa. È pertanto necessario associare la particella a un pacchetto d'onda con estensione  $\Delta x$ . Il modo più semplice, ricalcando quanto fatto più sopra, è quello di sommare non 2, ma un alto numero  $N$  di onde piane di pari ampiezza e con lunghezze d'onda comprese nell'intervallo  $\Delta \lambda = \lambda_f - \lambda_i$ , con  $\lambda_f = \lambda_i + \Delta \lambda$ . Posto  $\delta \lambda = \Delta \lambda / N$ , l'ennesima onda

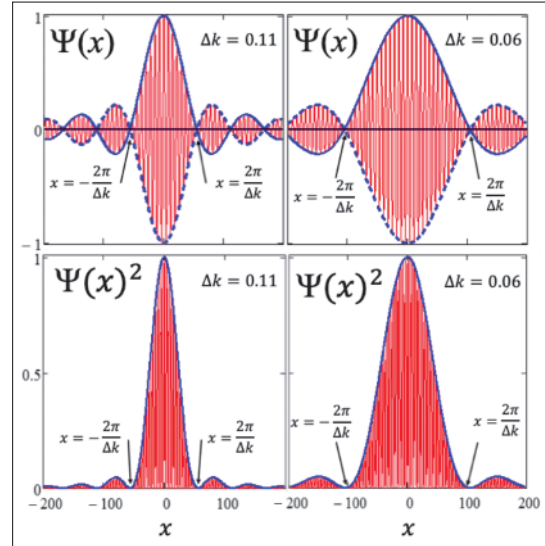


FIG. 10. Due esempi della funzione d'onda  $\Psi(x)$  e del suo quadrato. Il primo risulta dall'interferenza di onde piane con  $\lambda$  comprese tra  $\lambda_i = 7$  e  $\lambda_f = 8$  (pannelli a sinistra); per il secondo valgono  $\lambda_i = 7$  e  $\lambda_f = 7,5$  (pannelli a destra). I valori delle  $\lambda$  e delle  $x$  in ascissa sono nelle stesse unità arbitrarie. Anche le ordinate sono in unità arbitrarie. La linea blu continua rappresenta l'involuppo  $f(\xi)$  dell'eq. (8); per meglio evidenziare il contorno dei pacchetti è anche riportata una linea blu tratteggiata che rappresenta  $-f(\xi)$ . Tenuto conto che  $\Delta k \propto \Delta p$ , la figura rende visivamente quanto stabilito dall'eq. (9): quanto minore è la larghezza  $\Delta x$  del picco di probabilità, tanto maggiore è l'incertezza sull'impulso della particella.

ha una  $\lambda_n = \lambda_i + n \delta \lambda$ , dove  $n$  è un intero nell'intervallo  $0 \leq n \leq N$ . Questo definisce le quantità  $k_n = 2 \pi / \lambda_n$ . Abbiamo pertanto<sup>12</sup>

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^N A \cos(k_n x). \quad (7)$$

Il risultato è mostrato in FIG. 10. Le lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda_i$  e  $\lambda_f$  sono in realtà infinite e dunque avremmo  $N \rightarrow \infty$ . Dal punto di vista matematico questo significa passare dalla sommatoria all'integrale, cosa che noi eviteremo. Riportiamo tuttavia l'espressione risultante:

$$\Psi(x) = A \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta k}{2} x\right)}{\frac{\Delta k}{2} x} \cos(\bar{k} x). \quad (8)$$

Questa  $\Psi(x)$  è del tutto simile a quella ottenuta dall'eq. (7), ma ora è possibile evidenziare, come in FIG. 9, l'involuppo  $f(\xi) = \text{sen}(\xi) / \xi$  (con  $\xi \equiv 0,5 \Delta k x$ ) dei pacchetti (linee blu in FIG. 10). Nonostante la presenza di pacchetti minori,<sup>13</sup> è bene consi-

<sup>12</sup> Per indicare in forma compatta la somma di  $N$  addendi si utilizza il simbolo sommatoria  $\sum_{n=1}^N a_n = a_1 + \dots + a_2 + a_n + \dots + a_N$ .

<sup>13</sup> È possibile ottenere un pacchetto singolo privo di pacchetti secondari se le onde hanno ampiezze diverse che dipendono opportunamente ciascuna dalla propria  $\lambda$ .

derare come significativo il solo pacchetto centrale (vedremo tra poco perché) compreso tra i primi due zeri di  $f(\xi)$ :  $\frac{\Delta k}{2} x_1 = -\pi$  e  $\frac{\Delta k}{2} x_2 = \pi$ ; il pacchetto si estende dunque su un intervallo  $x_2 - x_1 \equiv Dx = 4\pi/\Delta k$ , una relazione simile all'eq. (6).

La FIG. 10 indica anche l'andamento di  $\Psi(x)^2$  che, come sottolineato nel livello base, rappresenta ciò che più ci interessa, ossia la probabilità di trovare l'elettrone in un determinato punto. Come si vede, tale probabilità è trascurabile per valori di  $x$  esterni a  $Dx$ , e questo ci autorizza a ignorare i pacchetti minori. Statisticamente, si utilizza un intervallo centrale  $\Delta x$  all'interno di  $Dx$ :  $\Delta x = Dx/2 = 2\pi/\Delta k$  (entro cui è racchiuso circa l'80% delle probabilità di trovare la particella). Dalla relazione di de Broglie, eq. (3), abbiamo  $p = h/\lambda = (h/2\pi)k$  con un'incertezza sulla quantità di moto  $\Delta p = (h/2\pi)\Delta k$  che, combinata con l'espressione di  $\Delta x$ , dà luogo alla relazione  $\Delta x \Delta p = h$  molto vicina, nonostante le grandi approssimazioni e semplificazioni adottate, a quella corretta

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (9)$$

che rappresenta il famoso principio di indeterminazione enunciato da Werner Heisenberg (1901-1976, Nobel nel 1932). Questo principio stabilisce che non è possibile attribuire contemporaneamente ad una particella quantistica un preciso valore di posizione e quantità di moto (come invece avviene

nel mondo macroscopico, p.e. per una palla da tennis). Al contrario, quanto minore è l'incertezza  $\Delta x$  della posizione, maggiore è quella sull'impulso (FIG. 10). Queste incertezze rappresentano una caratteristica della natura che permane indipendentemente dall'accuratezza delle nostre misure.

Ma oltre a  $x$  e  $p$  vi sono altre coppie di variabili che soggiacciono al principio di indeterminazione come, p.e.,  $E$  e  $t$ . Si consideri il pacchetto collegato a una particella che si muove con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$ ; l'istante in cui passa in un certo punto non è determinato con precisione, ma con un'incertezza  $\Delta t \sim \Delta x/v$ . In base all'eq. (2) abbiamo<sup>14</sup> inoltre  $\Delta E = v\Delta p$ . Combinando queste due incertezze, e tenendo conto dell'eq. (9), otteniamo

$$\Delta E \Delta t \cong \Delta x \Delta p. \quad (10)$$

Questo significa che l'energia di una particella non si conserva esattamente ma può variare temporaneamente di una quantità  $\Delta E$  tanto maggiore quanto minore è la durata  $\Delta t$  di tale variazione.

Il principio di indeterminazione è uno dei pilastri della meccanica quantistica ed è gravido di conseguenze sia nella fisica di base che in alcune applicazioni macroscopiche di uso quotidiano. A questo principio abbiamo dedicato le Spigolature del n. 1 del 2009.

<sup>14</sup> Posto  $\zeta \equiv \Delta p/p$  abbiamo  $\Delta E = (1/2m)[(p + \Delta p)^2 - p^2] = (1/2m)(2p\Delta p + \Delta p^2) = (1/2m)(2 + \zeta)\zeta p^2 \approx p\Delta p/m = v\Delta p$ . Il penultimo passaggio è ottenuto assumendo  $\zeta \ll 2$ , e quindi trascurabile all'interno della parentesi.

**Annibale D'Ercole** si è laureato in Fisica alla Sapienza Università di Roma. Astronomo associato presso l'INAF - Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.