

# Spigolature astronomiche★

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS)

## Il sistema GPS

Annibale D'Ercole

GPS è l'acronimo di *Global Positioning System* (Sistema Globale di Posizionamento). Si tratta di un sistema realizzato dal Ministero delle Difesa Statunitense mediante cui qualunque utente che disponga di un idoneo apparato ricevente è in grado di rilevare la propria posizione in qualsiasi punto della Terra esso si trovi. Il GPS rappresenta una delle più complesse tecnologie esistenti e noi in questa sede proveremo a descriverne a grandi linee le basi concettuali, partendo dal seguente semplicissimo esempio (FIG. 1).

Supponiamo di trovarci in un bosco e di aver perso l'orientamento. Un passante ci informa che ci troviamo ad una distanza  $r_1$  dalla località  $A_1$  la cui posizione è nota. Puntiamo allora il compasso sul punto  $A_1$  rappresentato su una cartina della zona e disegniamo un cerchio di raggio  $r_1$  (adattato alla scala della cartina). La nostra posizione si trova quindi su uno degli infiniti punti di questa circonferenza. Fortunatamente, un altro passante ci comunica che siamo anche ad una distanza  $r_2$  dal paese  $A_2$  di posizione nota. Eseguiamo un secondo cerchio di raggio  $r_2$  centrato su  $A_2$ . I due cerchi si incrociano in due soli punti e noi dobbiamo trovarci necessariamente in uno di questi. Un terzo passante ci riferisce infine che siamo ad una distanza  $r_3$  dal paese  $A_3$ . Il terzo cerchio intercetta uno dei due punti precedenti. Quest'ultimo rappresenta finalmente la nostra posizione nel bosco (punto rosso in FIG. 1). Questo metodo per individuare una posizione tramite distanze è detto *trilaterazione* e, come tutti i metodi,

\* Questa rubrica – iniziata nel 1999 e che ha ormai quasi raggiunto i novanta numeri – si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi “fondamenti di astronomia”, volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del *Giornale di Astronomia*, <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

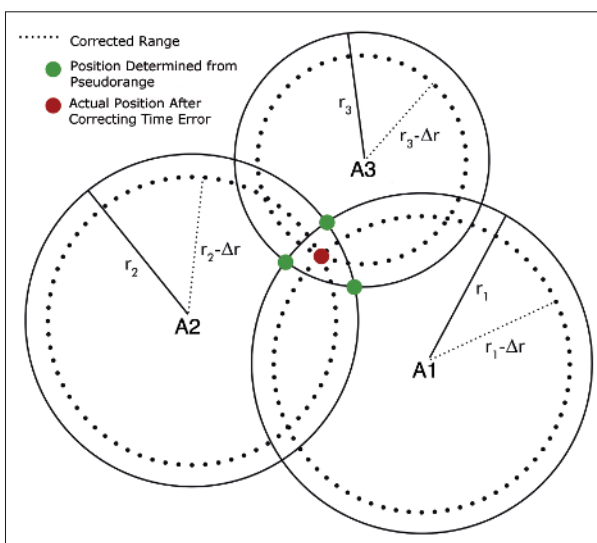


FIG. 1. Esempio di trilaterazione “bidimensionale”. Il disco rosso rappresenta la posizione del ricevitore e i cerchi punteggiati hanno raggi  $d_n = r_n - \Delta r$  pari alle distanze del ricevitore dalle posizioni di riferimento  $A_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ).  $\Delta r$  rappresenta l'errore con cui sono note queste distanze e che induce un'incertezza nella localizzazione del ricevitore all'interno dell'area del “triangolo” i cui vertici sono identificati dai tre dischi verdi.

non è esente da errori. I passanti, infatti, non sono in grado di darci la distanza dei paesi di riferimento con assoluta precisione ma con un errore  $\Delta r$ , per cui in realtà  $r_A = d_A + \Delta r$ , dove  $d_A$  è la distanza reale. Stiamo assumendo che  $\Delta r$  sia lo stesso per i tre passanti; un'ipotesi irrealistica nel presente esempio ma, come vedremo, valida per quanto riguarda l'errore preponderante nella valutazione delle distanze dei satelliti GPS. Come illustrato in FIG. 1, gli errori sulle distanze impediscono l'individuazione di un punto preciso, ma si riflettono in un errore della nostra posizione rappresentato dall'area triangolare i cui vertici sono indicati da tre punti verdi.

Vediamo ora di rendere un poco più “tecnologico” l'esempio appena descritto. Supponiamo che sia posta un'antenna in ciascuna delle località  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ . Queste antenne sono dotate di orologi in modo da emettere impulsi radio ad intervalli regolari sincronizzati in modo che i vari “bip” partano contem-

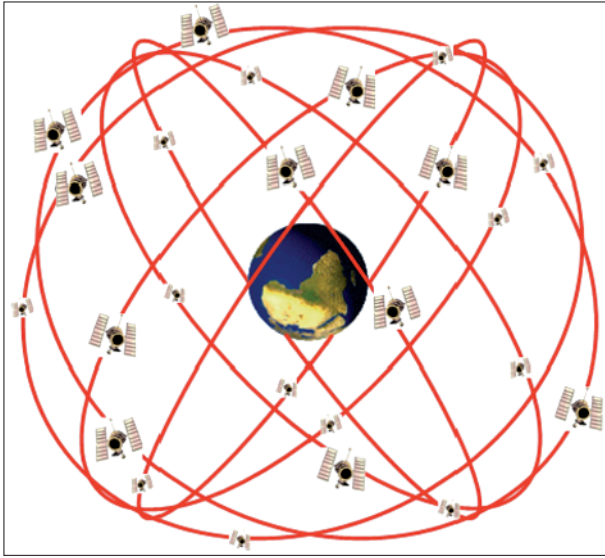


FIG. 2. Costellazione di satelliti che rappresentano il cosiddetto segmento spaziale del sistema GPS.

poraneamente dalle diverse antenne. Ognuno di questi “bip” radio contiene informazioni quali la posizione (le coordinate) dell’antenna che li ha emessi – ad esempio, l’antenna in  $A_1$  – ed il tempo  $t_{A_1}^e$  a cui sono stati emessi.

Immaginiamo ora di essere in possesso di un ricevitore (p.e. incorporato nel nostro cellulare) anch’esso dotato di un orologio sincronizzato con quelli delle antenne. Naturalmente il “bip” emesso ad un determinato istante viene ricevuto con un certo ritardo dovuto al tempo necessario all’impulso radio per percorrere la distanza  $d_{A_1}$  viaggiando alla velocità della luce  $c$  (pari a 300.000 km/s). Il ricevitore “conosce” non solo, ovviamente, il tempo della ricezione  $t_{A_1}^r$  indicato dal proprio orologio, ma anche quello  $t_{A_1}^e$  dell’emissione contenuto nel segnale radio ricevuto e può facilmente calcolare il tempo di ritardo  $\Delta t_{A_1} = t_{A_1}^r - t_{A_1}^e$  e la distanza

$$d_{A_1} = c\Delta t_{A_1}. \quad (1)$$

A questo punto il ricevitore esegue calcoli non banali il cui scopo, tuttavia, è alquanto semplice: individuare tre cerchi di raggio  $d_{A_1}$ ,  $d_{A_2}$  e  $d_{A_3}$  il cui punto di intersezione individua le coordinate della posizione del ricevitore. In questo caso l’errore sulle distanze (e sulla posizione del ricevitore) deriva, come si comprende dalla semplice formula mostrata più sopra, dall’errore di misura temporale  $\delta t$  dovuto alla limitata precisione degli orologi e che porta ad una misura falsata del ritardo, che possiamo scrivere come  $\tilde{\Delta t} = \Delta t + \delta t$ . La corretta distanza  $d_A$  si ottiene valutando e sottraendo  $\delta t$  alla misura  $\tilde{\Delta t}$  del ritardo. L’eq. (1) diventa allora:

$$d_{A_1} = c(\tilde{\Delta t}_{A_1} - \delta t). \quad (2)$$

Nel reale sistema GPS l’errore di posizione può arrivare a diverse centinaia di metri. Vedremo tra poco

(e soprattutto nel livello avanzato) come tale errore possa essere ridotto a 3-5 metri.

Terminiamo questo esempio “astratto” sottolineando che il ricevitore deve essere in grado di distinguere i segnali che gli giungono dalle diverse antenne per poter risalire alla distanza di ciascuna di esse. Pertanto, fissato un segnale di riferimento, ogni antenna invia un segnale con una sua caratteristica diversità, e questa “firma” permette al ricevitore di distinguere i segnali provenienti da antenne differenti (approfondiremo questo punto nel livello avanzato).

Veniamo ora al sistema GPS vero e proprio. Esso è legato ad una costellazione di satelliti il cui numero cresce nel tempo (attualmente sono 31). Le orbite sono sostanzialmente circolari con raggio di circa 26.560 km (i satelliti, cioè, sono a 20.000 km di altezza) e sono poste su 6 piani orbitali paralleli inclinati di  $55^\circ$  rispetto al piano equatoriale (FIG. 2). Ciascun piano orbitale ha almeno 4 satelliti e i piani sono disposti in modo tale che in ogni momento ogni punto della Terra venga visto da almeno 4 satelliti contemporaneamente (vedremo tra poco perché). I satelliti compiono due rotazioni al giorno attorno alla Terra ad una velocità di 4 km/s ( $\sim 14.000$  km/h). Ogni satellite conosce e ritrasmette continuamente la propria posizione e il tempo di emissione  $t^e$  che misura con altissima precisione grazie all’orologio atomico di cui è dotato.

I satelliti hanno la stessa funzione delle antenne del nostro esempio precedente e i loro orologi sono sincronizzati. In base al tempo di percorrenza dei segnali emessi dai satelliti il ricevitore può misurare la loro distanza [eq. (1)]. Ora, però, queste distanze non individuano dei cerchi ma delle sfere (FIG. 3). L’intersezione di due sfere evidenzia un cerchio, mentre l’intersezione con una terza sfera isola due punti sul cerchio. Normalmente uno dei due punti risulta alquanto al di sopra (o al di sotto) della superficie terrestre e viene dunque escluso. Il punto rimanente rappresenta perciò la posizione del nostro ricevitore.

Semberebbe, dunque, che tre satelliti siano sufficienti per individuare la nostra posizione con un errore dell’ordine del metro a patto che l’errore  $\delta t$  sia trascurabile (un errore pari a  $\delta t = 10^{-6}$  s si traduce in un errore  $c\delta t = 300$  m). In realtà questo non è vero. Mentre i satelliti hanno orologi atomici del costo di centinaia di migliaia di euro la cui accuratezza permette di raggiungere effettivamente precisioni metriche, il nostro ricevitore è dotato di un semplice orologio al quarzo, molto meno preciso ma di minimo ingombro e dal prezzo di poche decine di euro che ne permette una capillare commercializzazione. L’errore  $\delta t$  è dato per la massima parte da questo orologio. Per riuscire a mantenerlo sincronizzato con gli orologi atomici è necessario che il ricevitore tenga conto anche del segnale di un quarto satellite che dà origine ad una quarta sfera. Non è geometricamente possibile che le quattro sfere si intersechino nello stesso punto se l’orologio

del ricevitore non è più che preciso. Il ricevitore esegue allora una *routine* matematica che fa scalare progressivamente le sfere finché non si incontrano in un punto all'interno di un volume di incertezza (analogo al triangolo in FIG. 1) dall'estensione di pochissimi metri. Questo punto rappresenta la posizione del ricevitore ottenuta riducendo progressivamente, tramite la *routine* cui si è accennato, l'errore  $\delta t$  del ricevitore fino a valori compatibili con quelli, enormemente minori, degli orologi atomici (approfondiremo questo punto nel livello avanzato). Lo scostamento  $\delta t$  diventa dunque trascurabile al punto da "assimilare" l'eq. (2) all'eq. (1) e ottenere una distanza dal satellite estremamente vicina a quella vera.

In questa fase l'orologio al quarzo è sincronizzato con gli orologi satellitari ma, data la sua minore accuratezza, ricomincia subito ad accumulare un disallineamento con quest'ultimi che cresce nel tempo. Per mantenere la sincronia il ricevitore esegue in continuazione i calcoli cui abbiamo accennato. Con questo "trucco" un orologio di pochi euro mantiene un'accuratezza paragonabile a quella dei suoi ben più costosi "colleghi" atomici.

Come s'è detto, l'asincronia  $\delta t$  deriva in massima parte dall'orologio del ricevitore. Tuttavia è interessante sottolineare che una quota minoritaria ma comunque significativa di tale asincronia è dovuta agli effetti sia della relatività ristretta che della relatività generale, che abbandonano così il ridotto "orticello" degli addetti ai lavori per impattare nella vita quotidiana di tutti noi. La relatività ristretta prevede che le lancette di un orologio in movimento ruotino più lentamente rispetto a quelle di un orologio "fermo".<sup>1</sup> Questo rallentamento è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità. Gli orologi nei satelliti della costellazione sono più lenti ed ogni loro secondo corrisponde a 1,0000000007 secondi di un orologio a terra, ossia un *rallentamento* di circa  $7 \mu\text{s}$  al giorno ( $7 \mu\text{s} = 1 \text{ microsecondo} = 10^{-6} \text{ s}$ ). D'altra parte la relatività generale stabilisce che un orologio posto in un campo gravitazionale procede tanto più lentamente quanto più intenso è il campo stesso.<sup>2</sup> Questo produce, all'altezza dei satelliti dove la gravità è inferiore a quella alla superficie terrestre, un'*accelerazione* del tempo di  $45 \mu\text{s}$  al giorno. Nel complesso gli orologi satellitari corrono più velocemente di  $38 \mu\text{s}$  al giorno rispetto agli analoghi orologi atomici a terra. Pertanto, gli orologi destinati a essere collocati sui satelliti vengono opportunamente rallentati in modo da ottenere – una volta in orbita – una corretta sincronizzazione con quelli a terra.

<sup>1</sup> La prova sperimentale della dilatazione dei tempi è stata ottenuta nel 1972 dai fisici Hafele e Keating che posero un orologio atomico in viaggio su un aereo ad alta velocità. All'atterraggio l'orologio riportò un ritardo di alcuni nanosecondi rispetto a un orologio "gemello" rimasto a terra, in perfetto accordo con quanto previsto dalla relatività ristretta.

<sup>2</sup> Questo effetto è stato verificato nel 1960 dai due fisici Pound e Rebka.

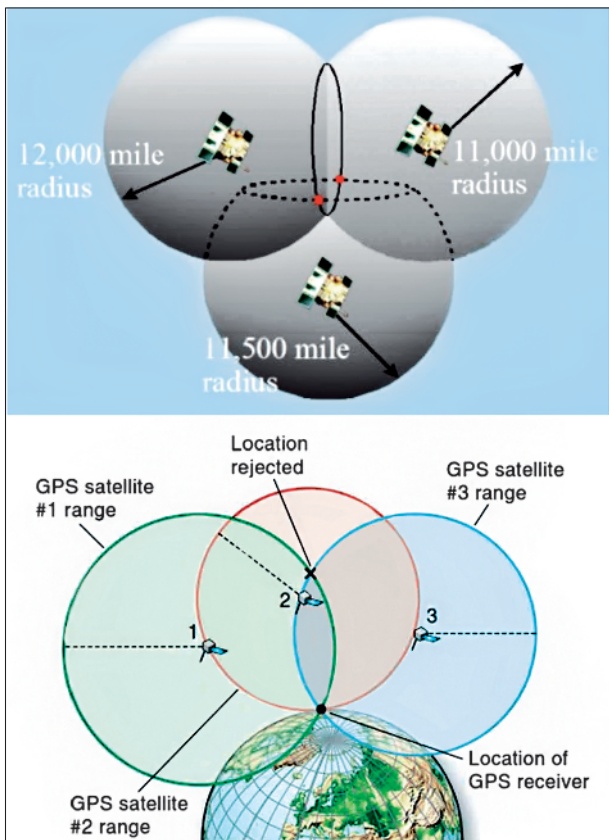


FIG. 3. Pannello superiore: illustrazione di una trilaterazione "tridimensionale". Le tre sfere ideali sono prodotte dai segnali inviati in sincrono da tre satelliti e che, a scopo esemplificativo, hanno, rispettivamente, raggi pari a 12.000, 11.000 e 11.500 miglia (1 miglio = 1,61 km). L'intersezione delle prime due sfere individua un cerchio (rappresentato come un ovale per questioni prospettiche). L'intersezione della terza sfera isola due punti sul cerchio (individuati nella figura con i simboli • e ×). Solo uno di questi è posto sulla superficie terrestre, mentre l'altro si trova al di sopra, come mostrato schematicamente nel pannello inferiore.

Fin qui ci siamo occupati della costellazione dei satelliti e del ricevitore che, nel "gergo" GPS vengono indicati, rispettivamente, come *segmento spaziale* e *segmento utente*. Esiste tuttavia un terzo segmento, per così dire, "intermedio" tra i due, detto *segmento terrestre* composto da cinque stazioni di controllo a terra quasi equidistanti lungo la linea equatoriale, la cui posizione è nota con grande precisione (dislocate alle Hawaii, Ascension Island, Diego Garcia, Kwajalein e Colorado Springs). La funzione principale delle stazioni di controllo è la correzione degli orologi di bordo<sup>3</sup> e il continuo tracciamento dei satelliti, al fine di calcolarne le coordinate con grande accuratezza. Queste coordinate vengono poi trasmesse ai satelliti che a loro volta le inviano ai ricevitori.

<sup>3</sup> Il cosiddetto tempo GPS misurato dagli orologi di bordo coincide sostanzialmente (a parte piccoli dettagli di cui non ci occupiamo) con il tempo UTC (*Coordinate Universal Time*) che scorre in accordo con il tempo scandito dalla rotazione terrestre. A causa di piccole irregolarità nella velocità di tale rotazione (dovute all'influenza di Sole e Luna) è necessario apportare saltuarie e "istantanee" correzioni alla misura del tempo UTC in maniera che la lunghezza del giorno misurata dagli orologi atomici risulti sempre di 24 h e quella dell'ora di 60 minuti.

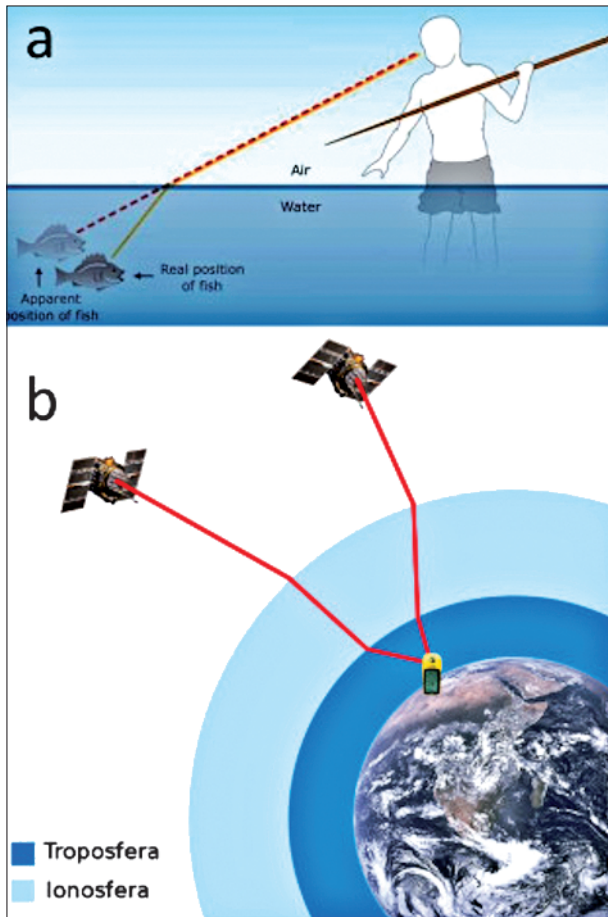


FIG. 4. a) La figura illustra il fenomeno della rifrazione. Un raggio luminoso si propaga in modo rettilineo. Se però durante il tragitto attraversa la superficie di contatto tra due sostanze differenti (in questo caso acqua ed aria), la sua traiettoria subisce una brusca deviazione e il pesce appare in una posizione diversa da quella reale. b) Analogamente, i segnali radio emessi dai satelliti subiscono due deviazioni, la prima alla superficie superiore della ionosfera e la seconda al confine tra ionosfera e troposfera.

Per non lasciare il lettore con l'impressione che la sincronizzazione degli orologi sia l'unico problema che il sistema GPS deve affrontare, ne citiamo altri due, sia pure superficialmente. Il primo è rappresentato dall'attraversamento della *ionosfera* da parte dei segnali satellitari. La ionosfera è una fascia dell'atmosfera terrestre che si estende tra i 50 e i 500 km di altezza e risulta ionizzata a causa della radiazione solare. La velocità del segnale radio risulta minore di  $c$  attraverso un mezzo ionizzato. Inoltre, il percorso del segnale subisce due deviazioni (all'entrata e all'uscita della ionosfera) a causa del fenomeno della *rifrazione* che si verifica ogni volta che un raggio elettromagnetico attraversa il contatto tra due mezzi (trasparenti) diversi (FIG. 4). Entrambi questi effetti portano ad una misura per eccesso della reale distanza dei satelliti. Il secondo problema va sotto il nome di *multipath* (percorsi multipli), un fenomeno che si realizza quando ci troviamo vicino a degli ostacoli, p.e. dei palazzi. Il ricevitore è raggiunto da segnali riflessi anziché (o oltre che) diretti (FIG. 5), ed anche in questo caso viene introdotta una valutazione eccessiva della distanza del satellite.

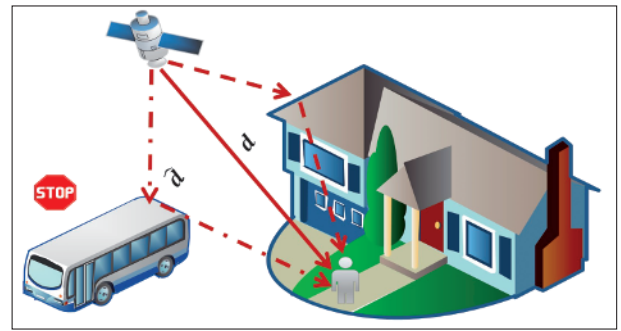


FIG. 5. Esempio di *multipath*. Il segnale proveniente da un satellite è riflesso da alcuni ostacoli e raggiunge il ricevitore da diverse direzioni "confondendolo".

*Immaginiamo un organista che preme continuamente un unico tasto in modo da emettere un'onda sonora sinusoidale<sup>4</sup> di ben precisa frequenza  $\nu$ . Un eventuale ascoltatore sente il suono ma non percepisce alcuna melodia. Perché questo possa avvenire è necessario che la sinusoida venga modulata, ossia subisca nel tempo variazioni di ampiezza e/o di frequenza e/o di fase. Analogamente, supponiamo ora che l'organista voglia trasmettere un'informazione all'ascoltatore. Egli allora può, ad esempio, modulare il suono producendo emissioni di due diverse durate temporali intervallate da qualche attimo di silenzio ed associare, secondo una preordinata regola – o codice –, sequenze diverse di suoni lunghi e brevi alle diverse lettere dell'alfabeto. L'organista è così in grado di trasmettere informazioni componendo parole e frasi che l'ascoltatore può ricostruire se conosce il codice. In sostanza, quello che abbiamo appena descritto è una sorta di codice Morse "musicale" che ci insegna che un'onda deve presentare una qualche forma di modulazione per poter trasportare informazione.*

Veniamo ora alla descrizione (alquanto semplificata) dell'invio di informazioni da un determinato satellite al ricevitore. Il satellite trasmette con continuità un segnale radio sinusoidale di frequenza 1575,42 MHz. Come illustrato nell'esempio precedente, questo segnale, detto portante, non potrebbe trasferire informazione se non venisse opportunamente modulato grazie alla sovrapposizione di una seconda onda detta modulante. I dettagli su possibili modulazioni del segnale sono illustrati in FIG. 6. L'onda modulante somiglia a un "treno" i cui "vagoni" sono composti da ampiezze quadrate di varie lunghezze (temporali) separate da intervalli anch'essi di diversa durata. L'intero treno dura 1 millisecondo e viene ritrasmesso in continuazione. L'alternanza e la durata dei "vagoni" rappresentano un preciso codice che viene assegnato ad ogni sa-

<sup>4</sup> Una sinusoida che oscilla durante il tempo  $t$  si scrive come  $Asen(2\pi\nu t + \varphi)$ , dove  $A$ ,  $\nu$  e  $\varphi$  sono, rispettivamente, l'ampiezza, la frequenza e la fase dell'onda. Il periodo, ossia il tempo impiegato per passare da un massimo a quello successivo, è pari a  $T \equiv 1/\nu$ .

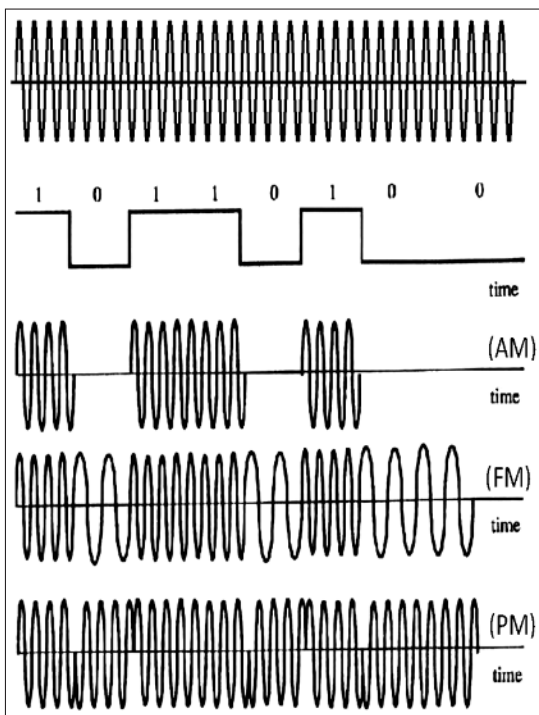


FIG. 6. Esempi di modulazione di segnale. La sinusoide in alto di fissata ampiezza e frequenza rappresenta l'emissione radio continua dei satelliti. Essa è detta *portante* ed è la stessa per ogni satellite della costellazione. La seconda onda, detta *modulante*, è composta da una successione di onde quadre di diversa durata e separate da lassi di tempo di diversa lunghezza. Ogni satellite ha una sua specifica modulante e questa "firma" permette al ricevitore di capire da quale satellite proviene il segnale. È possibile associare un 1 ai massimi delle onde quadre e uno 0 ai minimi. La modulante può quindi essere intesa come una sequenza di uni e di zeri. Il segnale è dato da una sovrapposizione della modulante e della portante. Gli intervalli in cui avviene la sovrapposizione con gli 1 non comporta alcuna variazione della portante. Gli 0, invece, possono intervenire in modi diversi. Nella cosiddetta *modulazione d'ampiezza* (AM) gli 0 annullano l'ampiezza della portante e il segnale consiste in una sequenza di "pacchetti" d'onda di diversa durata e separazione temporale. Nel caso della *modulazione di frequenza* (FM) gli 0 variano la frequenza della portante e i pacchetti sono separati da tratti in cui la lunghezza d'onda è diversa. Infine, la modulazione di fase si ottiene cambiando la fase della portante in corrispondenza degli 0. In particolare, un cambiamento di fase di  $180^\circ$  implica un "ribaltamento" dell'onda con i massimi e i minimi che si invertono. Quest'ultimo tipo di modulazione è quello effettivamente utilizzato dal GPS.

telette. Il ricevitore è in grado di generare repliche dei vari codici il cui confronto con quelli inviati dai satelliti permette di associare i diversi segnali ricevuti ai diversi satelliti che li emettono.

Il segnale satellitare trasporta una quantità di informazioni quali, ad esempio, il tempo GPS nonché la posizione del satellite. Non è questa la sede per una completa disamina di ogni tipo di informazione e della relativa modalità di trasmissione. Ci limiteremo a descrivere (anche qui in maniera alquanto semplificata) come sia possibile risalire con grande precisione all'informazione di maggior rilievo per la successiva operazione di trilaterazione,

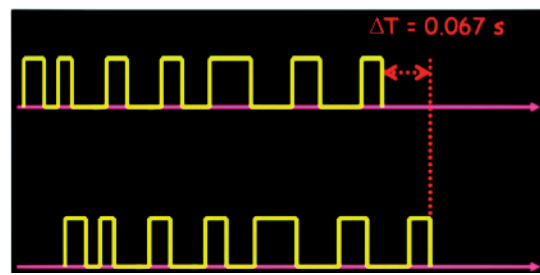


FIG. 7. La modulante (in alto) emessa da un determinato satellite posto a distanza  $d$  giunge con un ritardo  $\Delta t$  rispetto all'identica modulante (in basso) generata contemporaneamente dal ricevitore. Al netto di tutte le correzioni di cui bisogna tener conto (si veda il livello base) il ritardo misurato è dell'ordine di 0,067 secondi e possiamo calcolare la distanza del satellite  $d = c\Delta t = 20.000$  km (naturalmente satelliti a distanze diverse producono ritardi diversi, ma sempre con valori simili).

ossia la determinazione delle distanze  $d_n$  degli  $n$  satelliti osservabili a un determinato istante dal ricevitore.

Queste distanze si ricavano in base alla correlazione temporale tra il segnale in arrivo dal satellite e la sua replica generata dal ricevitore. I due segnali, benché identici e sincronizzati,<sup>5</sup> risultano sfalsati al ricevitore a causa del ritardo accumulato dal segnale satellitare per percorrere la distanza  $d_n$  (FIG. 7): tale ritardo è dunque pari a  $\Delta t_n = t^r - t_n^e$ , con  $t^r$  indicante il tempo in cui il segnale raggiunge il ricevitore e  $t_n^e$  il tempo in cui il segnale è stato emesso.

Per ottenere misure di posizione con un errore dell'ordine del metro è necessario ricavare valori dei  $d_n$  di analoga accuratezza. Tenuto conto che  $c = 3 \times 10^8$  m/s, 1 m equivale a 3,3 ns (1 ns = 1 nanosecondo =  $10^{-9}$  s). Dunque, per conseguire misure di distanze con un errore dell'ordine del metro è necessario che l'orologio del satellite non accumuli anticipi o ritardi maggiori di 3,3 ns durante un periodo di  $12$  h = 43200 s (il tempo di percorrenza di un'orbita). Per questo si richiede un livello di stabilità dell'ordine di una parte su  $10^{13}$  ( $3,3 \times 10^{-9} / 43200 = 0,8 \times 10^{-13}$ ). Tali livelli sono ottenibili dagli orologi atomici, e questo spiega il loro utilizzo per la misura dei  $\Delta t_n$ .

Una volta misurati i vari  $\Delta t_n$  il ricevitore trasforma in formule matematiche il problema della trilaterazione che abbiamo esposto in termini geometrici nel livello base. Diamo qui di seguito una descrizione alquanto semplificata delle operazioni eseguite dal ricevitore.

Consideriamo un riferimento cartesiano con origine, ad esempio, nel centro della Terra. La posizione di ognuno degli  $n$  satelliti "visti" dal rice-

<sup>5</sup> Naturalmente, per eseguire una trilaterazione le distanze  $d_n$  devono essere misurate allo stesso istante e questo richiede che tutti gli orologi siano sincronizzati tra loro con la massima accuratezza.

vitore è comunicata a quest'ultimo dal satellite stesso ed è individuata da una terna di coordinate  $(x_n, y_n, z_n)$ , mentre il ricevitore occupa la posizione  $(X, Y, Z)$ . Posto  $\Delta x_n \equiv x_n - X$  (e analogamente per le altre coordinate) possiamo scrivere la distanza tra satellite e ricevitore come

$$d_n = [(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2 + (\Delta z_n)^2]^{0,5} = c\Delta t_n,$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dall'eq. (1). Tenendo conto contemporaneamente della distanza del ricevitore da tre satelliti è possibile eseguire una trilaterazione per ottenere la terna  $(X, Y, Z)$  che individua la posizione del ricevitore stesso. Traducendo in termini matematici le considerazioni descritte nel livello base sull'intersezione tra sfere, si mettono a sistema le distanze di tre satelliti (ossia i raggi delle sfere centrate sui tre satelliti) in modo che la terna  $(X, Y, Z)$  sia una soluzione del sistema, ossia soddisfi contemporaneamente tutte e tre le equazioni delle distanze individuando un punto intersezione delle tre superfici sferiche:

$$\sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 + (z_1 - Z)^2} = c\Delta t_1$$

$$\sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 + (z_2 - Z)^2} = c\Delta t_2$$

$$\sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2 + (z_3 - Z)^2} = c\Delta t_3$$

Le equazioni sono quadratiche e hanno due terne soluzioni; tuttavia, una delle due individua un punto lontano dalla superficie terrestre e viene esclusa, isolando così la terna indicante la posizione "giusta" del ricevitore (FIG. 3). Le tre coordinate  $X, Y$  e  $Z$  vengono successivamente trasformate nelle abituali coordinate di latitudine, longitudine e altezza.

Sembrerebbe dunque che tre satelliti siano sufficienti per individuare la posizione del ricevitore con un errore dell'ordine del metro. In realtà questo sarebbe vero se anche il ricevitore fosse dotato, al pari dei satelliti, di un orologio atomico. Ma per motivi di ingombro e di costo questo non è possibile. I normali ricevitori utilizzati nelle nostre automobili o nei nostri telefonini utilizzano infatti un orologio al quarzo la cui deriva è dell'ordine di 1 secondo al giorno, ossia  $1/86400 \sim 10^{-5}$  secondi ogni secondo. Sul lasso di tempo di percorrenza della distanza satellite-ricevitore pari a

$$d/c \sim 2 \times 10^4 \text{ km} / (3 \times 10^5 \text{ km/s}) \sim 0,07 \text{ s}$$

questo comporta un disallineamento (arrotondando) di  $\delta t \sim 10^{-6} \text{ s}$  che si riflette in un errore sulla distanza del satellite (e della successiva localizzazione del ricevitore) pari a  $c\delta t \sim 300$  metri. Questi valori non sono ovviamente in linea con gli standard GPS. Per ottenere tali standard è necessario sincronizzare l'orologio del ricevitore con quelli dei satelliti o, detto in altro modo, bisogna ridurre  $\delta t$  a valori accettabili. Per ottenere questo risultato si considera  $\delta t$  un'incognita aggiuntiva (la quarta oltre a  $X, Y$  e  $Z$ ) e, analogamente a quanto discusso nel livello base, possiamo scrivere il ritardo misurato  $\tilde{\Delta} t = \Delta t_n + \delta t$  ( $\delta t$  dipende dal ricevitore ed è lo stesso rispetto a tutti i satelliti; per questo è privo dell'indice  $n$ ). Questa incognita aggiuntiva si può ricavare considerando un quarto satellite e aggiungendo quindi un'equazione al sistema precedente. In analogia all'eq. (2) scriviamo allora

$$\sqrt{(x_1 - X)^2 + (y_1 - Y)^2 + (z_1 - Z)^2} = c(\tilde{\Delta} t_1 - \delta t)$$

$$\sqrt{(x_2 - X)^2 + (y_2 - Y)^2 + (z_2 - Z)^2} = c(\tilde{\Delta} t_2 - \delta t)$$

$$\sqrt{(x_3 - X)^2 + (y_3 - Y)^2 + (z_3 - Z)^2} = c(\tilde{\Delta} t_3 - \delta t)$$

$$\sqrt{(x_4 - X)^2 + (y_4 - Y)^2 + (z_4 - Z)^2} = c(\tilde{\Delta} t_4 - \delta t)$$

Il sistema viene risolto con un processo matematico di tipo iterativo. Dal punto di vista geometrico questo equivale a scalare progressivamente tutte le distanze dai satelliti variando  $\delta t$  fino a far intersecare le quattro superfici sferiche in un unico punto (la posizione del ricevitore); questo avviene quando  $\tilde{\Delta} t_n \approx \Delta t_n$  riducendo  $\delta t$  a valori dell'ordine di 12 ns. Il ricevitore può quindi considerarsi sincronizzato (entro i limiti di misura) con gli orologi dei satelliti. Dal momento che l'orologio al quarzo è assai meno preciso degli orologi atomici, subito dopo la sincronizzazione esso torna di nuovo ad accumulare uno scostamento da quest'ultimi. Per tale motivo il ricevitore risolve continuamente (più volte al secondo) il sistema di equazioni in maniera da mantenere "in riga" l'orologio al quarzo con quelli atomici.

Naturalmente, nel tempo i satelliti si spostano e le terne  $(x_n, y_n, z_n)$  vanno aggiornate. Questo aggiornamento avviene ogni due ore. Benché tale intervallo possa sembrare lungo, esso tuttavia non degrada le precisioni di geolocalizzazione richieste.

**Annibale D'Ercole** si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.