

Il diavoletto di Maxwell, il congegno di Smoluchowsky-Feynman e i motori browniani

Annibale D'Ercole

DURANTE il Medioevo vari studiosi si dedicarono all'ideazione di macchine dotate di *moto perpetuo*, fornite cioè della straordinaria capacità di produrre indefinitamente lavoro (come, ad esempio, sollevare pesi) senza la necessità di fornire loro energia.

In FIG. 1 è illustrata la ruota a moto perpetuo proposta nel 1150 dal matematico indiano Bhaskara (1114-1185). Al girare della ruota (in senso orario) i bracci mobili a destra si estendono e i pesi alle loro estremità si allontanano dal centro. Secondo l'inventore di questa macchina, questi pesi, essendo posti ad una distanza maggiore dall'asse di rotazione, mantengono la ruota in movimento perché spingono verso il basso più efficacemente degli altri. Tuttavia questi ultimi, benché più vicini al centro, sono più numerosi e controbilanciano l'effetto di torsione dei pesi più distanti. La ruota, pertanto, rimane ferma e non è in grado di girare "da sola" creando energia dal nulla.

Oggi sappiamo che questi tentativi sono tutti destinati al fallimento perché contraddicono uno o entrambi i seguenti principi fondamentali: la conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica) e l'irreversibilità in generale dei fenomeni naturali (secondo principio della termodinamica). In FIG. 2 sono illustrati esempi di fenomeni reversibili e irreversibili.

* Questa rubrica (giunta alla sua 80ª puntata) si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

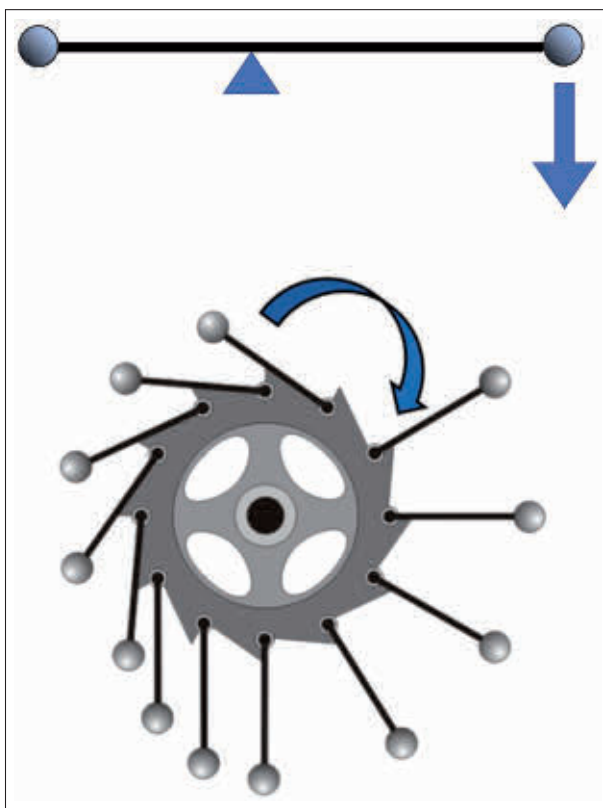


FIG. 1. Nel pannello superiore viene illustrata una sbarra alle cui estremità sono apposti due pesi uguali. Perché la sbarra stia in equilibrio è necessario che il punto di appoggio sia collocato nel mezzo. Se questo non accade, la figura mostra che il peso più distante da tale punto "prevale", e la sbarra subisce una torsione oraria. Il pannello inferiore mostra una variante della ruota di Bhaskara la quale, sfruttando il meccanismo illustrato nel pannello superiore, dovrebbe girare autonomamente, senza alcun apporto di energia fornito dall'esterno (si veda il testo).

Se solleviamo un sasso e lo poggiamo su un tavolo, spendiamo una certa quantità di energia muscolare. Una volta depositato il sasso questa energia non scompare, ma rimane, per così dire, "intrappolata" nel sasso sotto forma di energia potenziale che può essere riutilizzata successivamente. Se il sasso cade in terra, la sua energia potenziale si trasforma

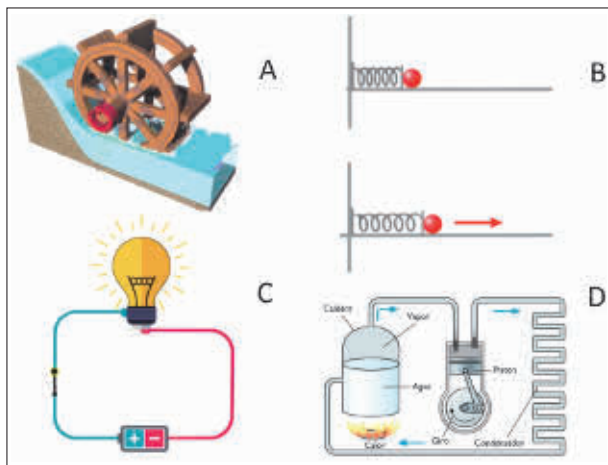


FIG. 2. Sono mostrati un esempio di fenomeno reversibile (pannello b) e tre esempi di fenomeni irreversibili di tipo meccanico (a), elettrico (c) e termico (d). In a la ruota del mulino gira grazie al flusso d'acqua che passa da un'altezza (potenziale gravitazionale) maggiore ad una minore. In c la lampadina si accende grazie al flusso di elettroni che viaggia dalla polarità negativa a quella positiva della batteria. In d la macchina termica funziona tramite un flusso di calore da una sorgente a temperatura maggiore ad una a temperatura minore, come stabilito dal secondo principio della termodinamica (si veda il testo). Infatti, l'acqua bollente viene trasformata in vapore ad alta pressione utilizzato per azionare un pistone. Successivamente il vapore viene raffreddato in una serpentina e, una volta condensato in acqua, inviato di nuovo alla sorgente ad alta temperatura. Se filmati e proiettati al contrario, i fenomeni a, c, d darebbero luogo ad eventi in contrasto con la nostra esperienza (p.e. in a il fiume scorrerebbe in salita). In b è illustrata una pallina che urta contro una molla da cui viene successivamente respinta acquisendo una velocità uguale e contraria a quella iniziale (in caso di attrito trascurabile). Questo comportamento non cambia durante una proiezione al contrario.

dapprima in energia cinetica durante la caduta, e poi in calore nell'urto col suolo (ossia in energia cinetica di agitazione termica degli atomi che compongono il sasso e il terreno su cui è caduto). Insomma, la nostra energia muscolare ha subito diverse trasformazioni ma non è andata perduta perché, come abbiamo detto, l'energia si conserva.

Per quanto riguarda il concetto di irreversibilità, ne daremo qui una "definizione" alquanto *naïf*, ma sufficiente per i nostri scopi. Immaginiamo di filmare un evento e poi di rivederlo facendo scorrere la pellicola al contrario. Se quello che vediamo non ci sorprende ma ci appare del tutto naturale, vuol dire che l'evento è reversibile: è questo il caso, per esempio, delle oscillazioni di un pendolo (nel caso di attrito trascurabile). Se invece immaginiamo, ad esempio, di poter distinguere nel filmato le molecole di un profumo disperse in una stanza che rientrano ordinatamente nella boccetta capiamo immediatamente che la pellicola sta scorrendo al contrario perché in natura avviene l'opposto, ossia un sistema tende ad evolvere *spontaneamente* verso stati più disordinati, come stabilito dal secondo principio.¹

¹ Irreversibilità e disordine vanno di pari passo. Per tornare nella boccetta le molecole di profumo dovrebbero avere ognuna la "giusta" posizione, la "giusta" velocità e i "giusti" urti con le

Questo principio può essere riformulato a livello macroscopico. Se mettiamo a contatto un corpo caldo con uno più freddo, parte dell'energia cinetica delle molecole del primo si trasmetterà alle molecole del secondo tramite urti successivi, e le molecole dei due corpi, considerate nella loro totalità, rappresenteranno un insieme più disordinato. Pertanto, a livello macroscopico, il secondo principio stabilisce che il calore tende a passare *spontaneamente* da un corpo più caldo ad uno più freddo (FIG. 2).² Questa formulazione del secondo principio ci tornerà utile più tardi.

Contrariamente al carattere assertivo del primo principio (l'energia è sempre conservata), il secondo principio ha una valenza statistica (in linea di principio non c'è nessuna legge che impedisca il ritorno spontaneo delle molecole di profumo nella boccetta, benché questa eventualità rimanga altamente improbabile). Questo aspetto "possibilista" ha indotto alcuni scienziati ad indagare se possano verificarsi situazioni in cui il secondo principio viene meno.

Uno dei tentativi più controversi di violare tale principio fu eseguito nel 1871 da James Clerk Maxwell (1831-1879) tramite un esperimento mentale. Immaginiamo un essere microscopico intelligente in grado di seguire le traiettorie di ogni molecola di gas. Immaginiamo poi una scatola piena di gas a temperatura T divisa in due compartimenti, A e B, da una parete con un piccolo foro. Questo essere – ribattezzato successivamente "diavoletto di Maxwell" – apre e chiude questo buco tramite una porticina in maniera da far passare solo le molecole veloci da A a B e quelle lente da B ad A (FIG. 3a). Dal momento che la temperatura di un gas è legata alla velocità delle molecole, col tempo il gas in B diventa più caldo e quello in A più freddo, e questo avviene a costo (energetico) nullo giacché in assenza di attrito il diavoletto non compie alcuno sforzo (e dunque non spende alcuna energia) nell'aprire e chiudere la porta.³ Tale risultato sembra smentire clamorosamente il secondo principio della termodinamica, e potrebbe venire usato per far funzionare una macchina termica in modo perpetuo utilizzando la differenza di temperatura tra le due sorgenti di calore A e B (FIG. 2d).

Il meccanismo appena descritto viene detto "diavoletto di temperatura". Ma il diavoletto può agire

molecole d'aria. La probabilità che questo si verifichi tra tutte le possibili, "disordinate" distribuzioni di velocità e posizioni è trascurabile, anche a causa dell'elevato numero di molecole, pari a $2,5 \times 10^{19}$ per centimetro cubo (a livello del mare).

² Naturalmente è possibile far scorrere il calore da una sorgente più fredda ad una più calda (come avviene normalmente nei nostri frigoriferi), ma questo non si realizza spontaneamente a costo energetico nullo. Al contrario, è necessario ricorrere ad un compressore che va alimentato con energia elettrica, e dobbiamo pagare una bolletta per questo!

³ In verità, una certa quantità di energia viene consumata dal diavoletto per far scorrere la porta. Ma tale quantità è trascurabile rispetto a quella che spenderebbe per trasportare attivamente le molecole da un lato all'altro del recipiente.

anche in un altro modo. Egli può far passare tutte le molecole (di qualunque velocità) da A a B e impedire la transizione opposta (FIG. 3b). L'aumento di densità in B comporta un aumento di pressione (si veda il livello avanzato). Si potrebbe allora immaginare di far ruotare una turbina che genera energia elettrica convogliando verso di essa il gas ad alta pressione. Una volta oltrepassata la turbina il gas verrebbe di nuovo immesso in A, chiudendo il ciclo. Anche il "diavoleto di pressione" genererebbe pertanto lavoro a costo zero.

Al tempo di Maxwell non fu possibile dare una spiegazione soddisfacente a questi paradossi. Oggi sappiamo che il diavoleto di temperatura non può funzionare perché necessiterebbe di energia – ad esempio, fotoni – per osservare le molecole e memorizzare quelle lente e quelle veloci. Di conseguenza il processo non avverrebbe *spontaneamente* e a costo zero, e il secondo principio non verrebbe violato.

Il problema del diavoleto di pressione è più subdolo. Nel 1912 il fisico polacco Marian Smoluchowsky (1872-1917) ideò una variante in cui il diavoleto è sostituito da una porta "automatizzata", collegata ad una molla, che si apre solo verso destra (FIG. 3c). Ogni volta che una molecola urta la porta da sinistra, questa si apre e la molecola passa nel comparto di destra mentre la molla richiude la porta impedendo il passaggio opposto (la porta, naturalmente, ha la stessa scala di dimensioni delle particelle del gas in maniera da risentire del singolo urto con ciascuna di esse). In questo caso, quindi, la soluzione valida per il diavoleto di temperatura non va bene. Tuttavia fu lo stesso Smoluchowsky a dare una spiegazione qualitativa del perché neanche il diavoleto di pressione può funzionare. Infatti, se immaginiamo che la struttura sia composta da materiale perfettamente elastico, dobbiamo considerare che la porta, urtando il battente dopo la chiusura, rimbalza indietro e continua a farlo continuamente perché ogni volta è spinta dalla molla contro lo stipite.⁴ Quindi, tutto sommato, la porta non è mai veramente chiusa, e questo permette il flusso di molecole in entrambe le direzioni, vanificando il funzionamento della macchina. Per ripristinare tale funzionamento è allora necessaria la presenza di una qualche forma di smorzamento, ad esempio dell'attrito nei cardini della porta. Naturalmente l'energia meccanica persa per attrito si trasforma in calore e la porta diventa sempre più calda (anche a causa dell'urto con le molecole del gas), acquisendo un movimento di agitazione termica dello stesso ordine di grandezza dell'energia di agitazione termica delle molecole stesse. Tale moto disordinato fa sì che la porta si apra e si chiuda in modo casuale, facendo passare di

⁴ Una palla che rimbalza contro il pavimento smorza progressivamente i suoi rimbalzi a causa dell'attrito e della dissipazione di energia dovute alla deformazione e al riscaldamento che si verifica ad ogni urto. Se quest'ultimo fosse perfettamente elastico, la palla non finirebbe mai di rimbalzare.

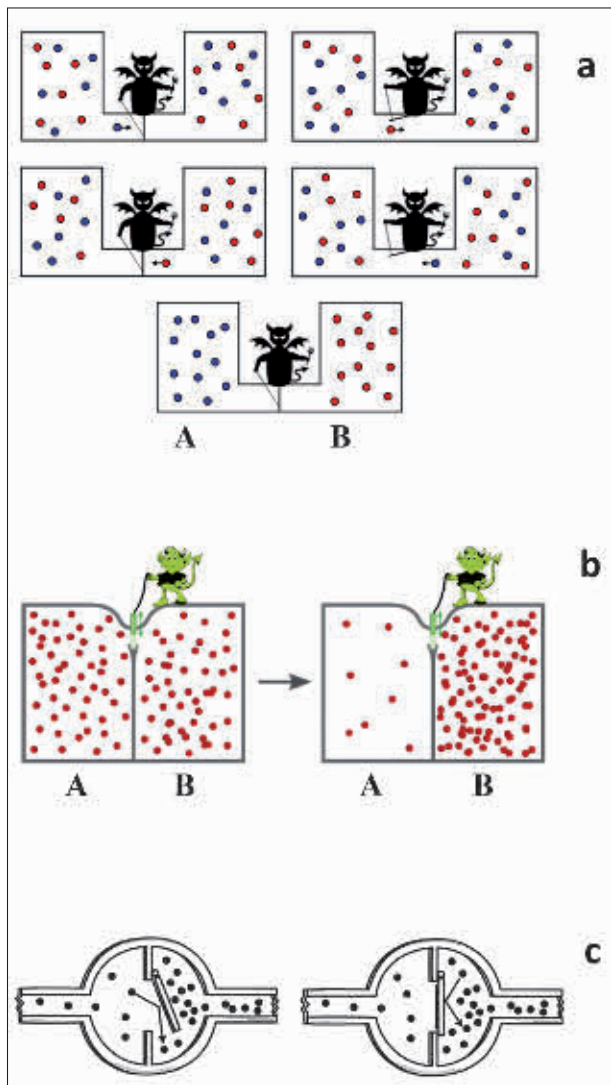


FIG. 3. a) Diavoleto (di temperatura) di Maxwell intento a separare le molecole "calde" (rosse) da quelle "fredde" (blu). b) Diavoleto di pressione intento a trasferire tutte le molecole in un volume ridotto del contenitore. c) Valvola di Smoluchowsky in cui il diavoleto è sostituito da una porta che si apre in una sola direzione a causa dell'urto di una molecola, e si richiude automaticamente grazie ad una molla (non mostrata in figura).

nuovo le molecole in entrambe le direzioni. Pertanto, il meccanismo non è in grado di produrre spontaneamente una differenza di pressione, e il secondo principio della termodinamica non è contraddetto.

Smoluchowsky propose anche un altro esperimento mentale riguardante la possibilità o meno di realizzare un moto perpetuo. Il dispositivo immaginato dallo scienziato polacco è rappresentato da un'asse alle cui estremità sono saldate due ruote: una ruota "1" dotata di pale (simili a quella di un mulino ad acqua) e una ruota "2" dentata (con denti asimmetrici) fornita anche di dente di arresto (detto pure *nottolino*) collegato ad una molla che lo spinge contro la ruota stessa (FIG. 4a). Le molecole d'aria che si muovono per agitazione termica costituiscono un serbatoio energetico pressoché illimitato, e "bombardando" le pale della ruota "1" la inducono a piccole oscillazioni avanti e indietro. Tuttavia, la

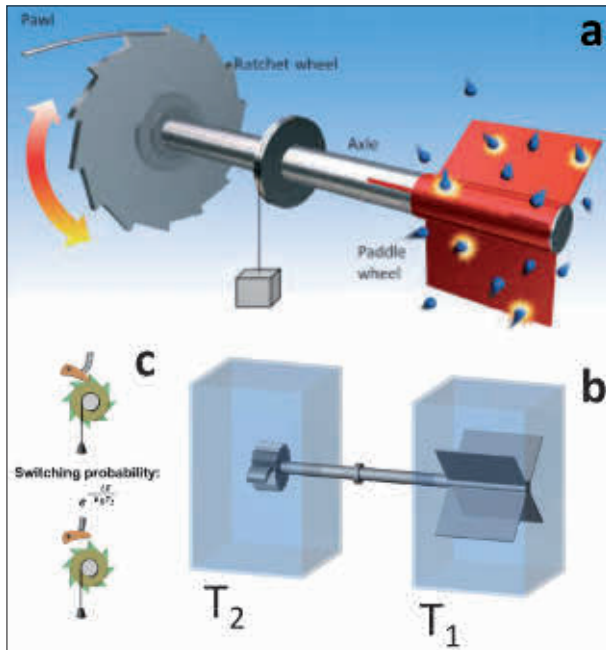


FIG. 4. a) Meccanismo di Smoluchowsky per estrarre lavoro dal moto browniano delle molecole d'aria. b) Modifica di Feynman in cui le due ruote sono tenute all'interno di due recipienti con temperatura T_1 e T_2 . c) Durante un'oscillazione termica di energia ΔE il dente di arresto si solleva al di sopra del dente della ruota permettendole un'eventuale rotazione in senso antiorario. Questa possibilità avviene con una probabilità data dalla formula di Boltzmann e^{-E/kT_2} (si veda il testo).

presenza del nottolino permette solo rotazioni in un'unica direzione (oraria in FIG. 4a). Apparentemente, si realizza un moto perpetuo tramite la trasformazione spontanea del moto disordinato delle molecole – detto *moto browniano*⁵ – nella rotazione ordinata delle ruote che può essere utilizzata per produrre lavoro come, ad esempio, sollevare un peso (FIG. 4a). Ma, come abbiamo visto, il secondo principio della termodinamica stabilisce il contrario, ossia che i sistemi fisici tendono ad evolvere verso stati più disordinati.

La soluzione a questo problema venne data, sia pure qualitativamente, dallo stesso Smoluchowsky. Il nottolino, al pari della porta automatica sostitutiva del diavolello di pressione, si scalda sia per gli urti con le molecole, sia per la necessaria presenza di attrito nel perno del nottolino stesso (il quale, altrimenti, rimbalzerebbe in continuazione). Il dente di arresto acquisisce quindi un movimento di agitazione termica che ne determina un innalzamento ed un abbassamento del tutto casuali. A volte l'estremità del nottolino si solleva al di sopra dell'altezza

del dente (FIG. 4c), permettendo così alla ruota dentata di muoversi in entrambi i sensi, e prevenendo la realizzazione di un moto ordinato di rotazione. Ancora una volta il secondo principio della termodinamica non viene smentito.

Nel 1963 il dispositivo di Smoluchowsky fu ripreso e reso popolare (vedremo perché) dal premio Nobel Richard Feynman (1918-1988) che riuscì a rendere quantitativa la spiegazione qualitativa di Smoluchowsky⁶ e a rendere funzionante il suo congegno. Feynman propose di racchiudere le due ruote in due contenitori separati tenuti a diversa temperatura (FIG. 4b). Per far girare le ruote è naturalmente necessario rifornire di energia termica il recipiente 1 (p.e. ponendolo su un termostato a temperatura T_1) in maniera da mantenere costante l'energia cinetica delle molecole di gas che viene trasferita alle pale e che altrimenti si esaurirebbe (per il principio della conservazione dell'energia). Vi è comunque una seconda condizione che va soddisfatta affinché il motore di Feynman possa realizzare una rotazione netta ed effettuare un lavoro: è necessario che sia $T_1 > T_2$, dove T_2 è la temperatura a cui è mantenuto il recipiente che racchiude la ruota dentata. Noi non seguiremo tutta la dimostrazione di Feynman, ma ci concentreremo sul punto focale dato dalla *distribuzione di Boltzmann* $e^{-E/kT}$, dove $e = 2,718$ è il numero di Nepero, $k = 1,38 \times 10^{-16}$ erg/K è la costante di Boltzmann, e T è la temperatura del gas espressa in gradi Kelvin.⁷

Questa formula indica la probabilità di una molecola di avere una data energia E . Le particelle, infatti, non hanno tutte la stessa energia ma sono ripartite secondo la distribuzione esponenziale di Boltzmann che ha un andamento decrescente al crescere di E del tipo illustrato in FIG. 6a. Pertanto le molecole con bassa energia sono più numerose di quelle più energetiche. Anche le oscillazioni del nottolino hanno energie (e dunque, ampiezze) che seguono la stessa legge probabilistica. In effetti, la formula di Boltzmann possiede una valenza assai generale e la si incontra in vari campi della fisica, sia classica che quantistica; per questo motivo le abbiamo dedicato lo spazio riservato al livello avanzato.

Tornando al congegno di Feynman, perché le ruote operino uno scatto in avanti è necessario che la ruota con le pale riceva una "spinta" in senso orario con un'energia E sufficiente a consentire al nottolino (che scorre sulla superficie superiore del dente della ruota dentata) di sollevarsi fin sulla cima del dente stesso, contrastando la forza di richiamo della molla. La probabilità che questo avvenga è e^{-E/kT_1} . D'altra parte, la probabilità che il nottolino subisca accidentalmente un'oscillazione termica che lo sol-

⁵ Nel 1827 il botanico Robert Brown scoprì che piccole particelle sospese nell'acqua mostrano movimenti vivaci ed irregolari (detti, appunto, moti browniani). La spiegazione di questo fenomeno venne data nel 1905 da Einstein che mostrò come il moto erratico di tali particelle sia dovuto al bombardamento continuo (circa 10^{14} collisioni al secondo) da parte delle molecole d'acqua (a quel tempo l'esistenza degli atomi era messa in dubbio anche da fisici del calibro di Ernest Mach).

⁶ Autori successivi hanno mostrato delle incongruenze nella dimostrazione di Feynman, le cui conclusioni, comunque, rimangono corrette. E noi ad esse ci riferiamo.

⁷ La scala Kelvin di temperatura è simile alla ordinaria scala Celsius, ma ha una diversa origine: 0 K corrispondono a -273 °C e 0 °C corrispondono a 273 K.

levi al di sopra del dente è pari a $e^{-E/\kappa T_2}$ (FIG. 4c). Questo significa che a volte il nottolino è sollevato per le fluttuazioni statistiche proprio quando la ruota riceve una spinta in senso antiorario e la ruota è libera di muoversi all'indietro. Se $T_2 = T_1$ le due probabilità si equivalgono e i successi (rotazione oraria) e gli insuccessi (rotazione antioraria) si pareggiano statisticamente. La ruota si limita ad un leggero tremolio e non produce alcun lavoro. Se invece $T_1 > T_2$, la formula di Boltzmann ci dice che la ruota con le pale ha maggiori probabilità di raggiungere l'energia E di quante non ne abbia il nottolino. Pertanto i successi superano gli insuccessi, e nel tempo la ruota opera statisticamente una rotazione oraria netta che le permette di produrre lavoro.

Dunque, Feynman ha dimostrato che il suo congegno (indicato spesso in letteratura anche come il motore di Smoluchowsky-Feynman) si comporta come un motore termico posto tra due sorgenti a diversa temperatura, rispettando il secondo principio della termodinamica. Nonostante questo risultato possa sembrare (quasi) scontato, questo motore ha destato molto interesse tra gli studiosi per il fatto di funzionare a livello molecolare. Esso rappresenta il prototipo dei cosiddetti *motori browniani* i quali, lungi dall'essere disturbati dai moti browniani dell'ambiente che li circonda, li utilizzano per "rettificarli" e compiere lavoro. Questi motori sono oggetto di molti studi in varie discipline. In biologia, per esempio, potrebbero gettare nuova luce sul movimento di molecole biologiche come l'RNA polimerasi o la proteina miosina (responsabile della contrazione muscolare). Alcuni ritengono che il movimento di queste molecole attraverso le cellule avvenga mediante particolari motori browniani, che rappresentano quindi un cambio di paradigma nel campo della biologia molecolare. Ne parleremo nel prossimo numero.

Come anticipato nel livello base, ci occuperemo ora di capire l'origine della legge di distribuzione di Boltzmann. Prima di addentrarci in tale argomento, tuttavia, è bene richiamare alcuni concetti riguardanti il legame tra le proprietà macroscopiche dei gas quali la temperatura T e la pressione P – e la loro origine microscopica.

La quantità di calore contenuta in un gas (la sua energia termica) è data, a livello microscopico, dall'energia cinetica del moto di agitazione termica delle molecole che lo compongono. Riscaldare un gas significa, quindi, aumentare l'energia cinetica delle sue molecole, ma anche, a livello macroscopico, aumentare la sua temperatura. Intuitivamente, perciò, possiamo associare la temperatura all'energia cinetica delle molecole (la dimostrazione, naturalmente, è più complessa di così).

La pressione che un gas esercita contro le pareti del recipiente che lo contiene è data dal numero e

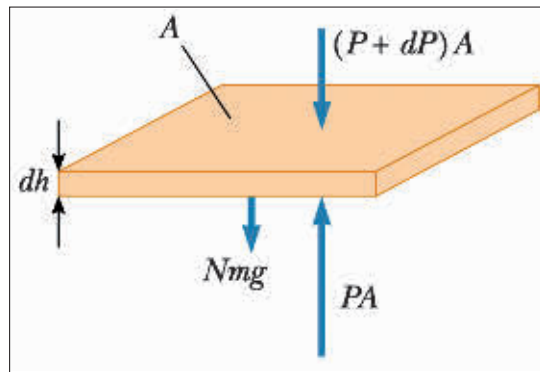


FIG. 5. Strato atmosferico in equilibrio. N rappresenta il numero di particelle contenute nello strato e m è la massa di ciascuna particella.

dalla violenza dagli urti delle molecole contro tali pareti. Il numero degli urti è evidentemente legato al numero di molecole n per centimetro cubo, mentre la loro violenza è connessa all'energia cinetica delle molecole stesse, ossia alla temperatura. È abbastanza naturale, allora, ritenere che la pressione sia proporzionale sia a n che a T . I calcoli rigorosi mostrano in effetti che la pressione può essere scritta come

$$P = n\kappa T, \quad (1)$$

dove κ è la costante di Boltzmann, e T è misurata in gradi Kelvin.

Per capire la distribuzione di Boltzmann consideriamo ora un argomento apparentemente slegato, ossia l'andamento della densità atmosferica con l'altezza h . La pressione atmosferica decresce con l'altezza perché un determinato strato d'aria deve sostenere il peso dell'atmosfera sopra di lui. Pertanto, al crescere dell'altitudine il peso sullo strato è minore, e minore è la pressione. Per determinare come questa varia con l'altezza, immaginiamo una colonna di atmosfera con una sezione di area A suddivisa in sottilissimi strati di spessore dh e di massa $m = \rho A dh = n \bar{m} A dh$, dove ρ è la densità dello strato e \bar{m} è la massa media delle molecole.⁸ Consideriamo un generico strato. Affinché l'atmosfera sia in equilibrio statico è necessario che la forza PA della pressione che spinge dal basso verso l'alto pareggi la forza $(P + dP)A$ della pressione che spinge verso il basso più il peso dello strato mg , dove g è l'accelerazione di gravità (FIG. 5). Pertanto possiamo scrivere

$$PA - (P + dP)A = n \bar{m} g A dh, \quad (2)$$

da cui

$$dp = - n \bar{m} g dh.$$

⁸ L'aria è composta sostanzialmente da azoto (80%) e ossigeno (20%). Una molecola di azoto ha una massa pari a $28 m_p$ e una di ossigeno $32 m_p$, dove $m_p = 1,67 \times 10^{-24}$ g è la massa di un protone. Pertanto $\bar{m} = 4,8 \times 10^{-23}$ g.

Tenuto conto dell'eq. (1), otteniamo

$$dn = -n \frac{\bar{m}g}{\kappa T} dh. \quad (3)$$

In quel che segue assumiamo che T rimanga costante⁹ e non vari con h . Chi ha qualche conoscenza di analisi matematica sa che questa equazione è facilmente integrabile ed ha come soluzione¹⁰

$$n = n_0 e^{\frac{-\bar{m}gh}{\kappa T}}, \quad (4)$$

dove n_0 rappresenta la densità al livello del mare.

Tuttavia, a scopo didattico a beneficio di coloro che non conoscono l'analisi matematica, riportiamo ora un metodo un poco rozzo ma efficace nell'illustrare il "dietro le quinte" del procedimento analitico esatto. Il lettore non interessato può saltare i due paragrafi successivi.

Assumiamo che tutti gli strati abbiano lo stesso spessore dh e che, passando da uno strato a quello successivo, la densità vari di una quantità fissa dn ad ogni passaggio. Se numeriamo i vari strati a partire dal basso, abbiamo che l' i -esimo strato è spinto dal basso dalla pressione P_i e pressato dall'alto dalla pressione $P_{i+1} = P_i + dP$. L'eq. (2) diventa allora

$$P_i A - (P_i + dP) A = n_i \bar{m} g A dh,$$

da cui, ripetendo i passaggi precedenti, abbiamo

$$dn = -n_i \frac{\bar{m}g}{\kappa T} dh = -n_i \frac{dh}{H}.$$

Per semplificare la scrittura nelle formule successive, nell'equazione precedente abbiamo definito la costante $H = (\bar{m}g/\kappa T)^{-1}$ che rappresenta una lunghezza caratteristica.

A questo punto possiamo procedere per passi successivi per calcolare i vari n_i :

$$n_1 = n_0 + dn = n_0 - n_0 \frac{dh}{H} = n_0 \left(1 - \frac{dh}{H}\right)$$

$$n_2 = n_1 + dn = n_1 \left(1 - \frac{dh}{H}\right) = n_0 \left(1 - \frac{dh}{H}\right)^2$$

$$n_3 = n_0 \left(1 - \frac{dh}{H}\right)^3$$

.....

⁹ In realtà questa assunzione non è del tutto corretta perché la temperatura decresce di circa due gradi ogni 300 m di incremento dell'altitudine. Questo vuol dire che la densità decresce più rapidamente di quanto indicato dall'eq. (4), la quale, comunque, illustra le caratteristiche basilari della distribuzione dell'atmosfera.

¹⁰ L'eq. (3) può essere riscritta come $dn/n = -(\bar{m}g/\kappa T) dh$, e integrata come $\int_{n_0}^n dn/n = -\int_0^h (\bar{m}g/\kappa T) dh$. Ne deriva $\ln(n/n_0) = -(\bar{m}g/\kappa T) h$, da cui, esponenziando, si ottiene l'eq. (4).

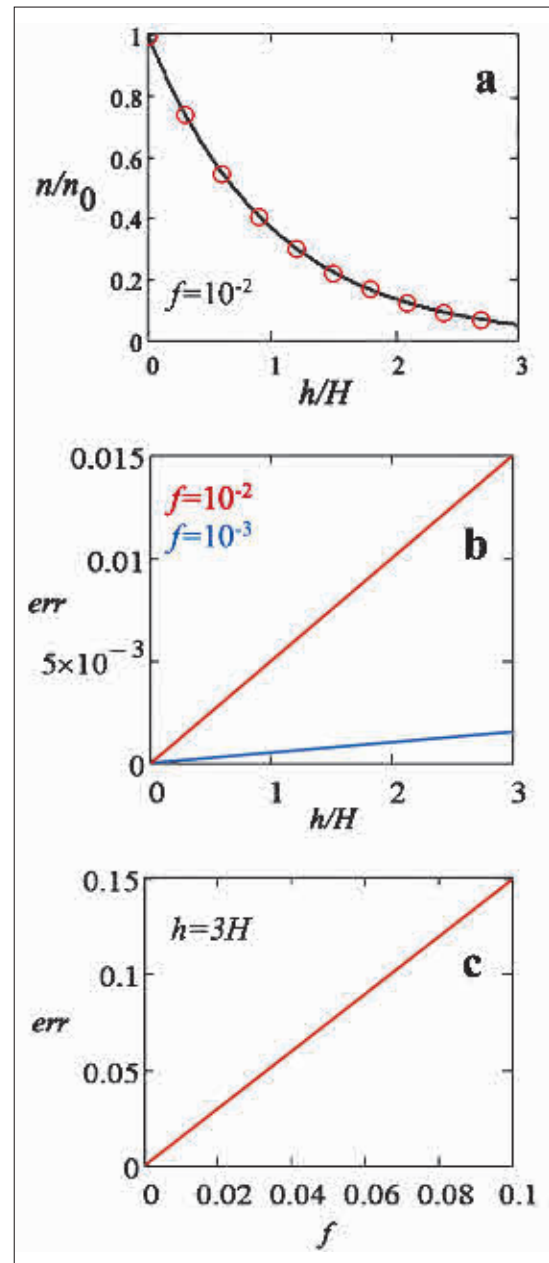


FIG. 6. a) I cerchi rossi mostrano l'andamento della densità atmosferica fino ad $h = 3H$ ottenuto tramite l'eq. (5), assumendo $f = 10^{-2}$. La linea continua indica la soluzione esatta data dall'eq. (4). b) Andamento dell'errore percentuale commesso utilizzando l'eq. (5) ponendo, rispettivamente, $f = 10^{-2}$ (linea rossa) e $f = 10^{-3}$ (linea blu). L'errore cresce con h e diminuisce con f . c) Errore in funzione di f calcolato a $h = 3H$, dove assume il suo valore massimo (vedi pannello b).

$$n_i = n_0 \left(1 - \frac{dh}{H}\right)^i. \quad (5)$$

I cerchietti nella FIG. (6a) mostrano l'andamento di n_i/n_0 al crescere di i (ossia al crescere di $h = idh$) secondo l'eq. (5). Nella stessa figura è rappresentata anche una linea continua che illustra l'andamento della funzione esponenziale $e^{-h/H}$ che, come si vede,

è praticamente sovrapponibile alla distribuzione dei cerchietti. Naturalmente le eqq. (4) e (5) non sono uguali, giacché quest'ultima rappresenta solo un'approssimazione della soluzione esatta. La bontà dell'approssimazione è data dal valore dell'errore percentuale

$$\text{err}(i, f) = \frac{e^{-idh/H} - \left(1 - \frac{dh}{H}\right)^i}{e^{-idh/H}} = \frac{e^{-if} - (1-f)^i}{e^{-if}}.$$

Il secondo passaggio è stato ottenuto ponendo lo spessore degli strati pari ad una frazione $f < 1$ di H , ossia $dh = fH$. Le FIGG. (6b) e (6c) mostrano come l'errore cresce con h e diminuisce al diminuire di f . In altre parole, la soluzione approssimata si avvicina a quella esatta tanto più quanto più sottili sono gli strati. In termini un poco più tecnici possiamo dire che l'errore tende a zero per f che tende a zero. In questo caso la densità non varia "a scatti" ma diminuisce con continuità. Quest'ultima condizione è sostanzialmente quella assunta nella procedura analitica utilizzata per ottenere la soluzione esatta.

L'eq. (4) è nota come "legge delle atmosfere". Tuttavia essa ha una valenza molto più generale. Si noti, infatti, che il numeratore dell'esponenziale

rappresenta l'energia potenziale¹¹ $E_p = mgh$ di una molecola di massa m posta all'altezza h . Questo significa che le molecole sono distribuite spazialmente con una probabilità che dipende dalla propria energia potenziale secondo il fattore esponenziale $e^{-E_p/\kappa T}$. Ma questa espressione ha una portata assai più vasta e si applica a qualunque tipo di energia, sia in fisica classica che in meccanica quantistica. In generale possiamo dunque scrivere

$$n = n_0 e^{-E/\kappa T}.$$

È questa la famosa legge di distribuzione di Boltzmann, ed è importante nella descrizione della meccanica statistica di un grande numero di molecole. Essa stabilisce che la probabilità di trovare una molecola in un particolare stato energetico varia esponenzialmente come il negativo dell'energia diviso κT . Tutte le molecole permarrebbero nel livello di minore energia se il moto di agitazione termica a temperatura T non le eccitasse a valori energetici superiori. La distribuzione di Boltzmann ci dice qual è la percentuale di molecole che si trovano ad una determinata energia E .

¹¹ Ricordiamo che l'energia potenziale di una molecola di massa m posta all'altezza h è pari al lavoro necessario per sollevare la molecola fino alla quota h . Tale lavoro è definito come forza applicata \times spostamento effettuato, ossia mgh .

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.