Spigolature astronomiche*

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS)

È la somma che fa il totale

Annibale D'Ercole

Il titolo di questa nota si rifà ad una famosa battuta di Totò la cui cifra comica risiede nella sua ovvietà. Vedremo, tuttavia, che se la somma si riferisce all'addizione di infiniti termini, il risultato diventa assai meno banale (in questa rubrica, nel n. 4 del 2013, abbiamo già visto quali sorprese può riservare l'infinito).

Iniziamo da un episodio che pare si sia svolto in Germania verso la fine del Settecento. Un maestro delle elementari diede come punizione alla sua classe turbolenta il compito di sommare i primi cento numeri naturali (ossia i numeri interi positivi), prefigurando così un lungo periodo di tranquillità, data l'onerosità del lavoro assegnato. Possiamo quindi immaginare la sua sorpresa quando, pochi istanti dopo, uno degli alunni gli presentò la risposta esatta. Il bambino era Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e sarebbe stato soprannominato dai suoi epigoni "il principe dei matematici" per la vastità e la qualità dei risultati da lui ottenuti in matematica (e non solo). La formula elaborata da Gauss per sommare i primi n numeri naturali è: (Fig. 1)

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Naturalmente S_n cresce al crescere di n, ossia al crescere del numero degli addendi; pertanto, se immaginiamo di tener conto di tutti gli infiniti numeri naturali – se immaginiamo, cioè, di far crescere n all'infinito – otteniamo un valore infinito per questa somma (Fig. 2).

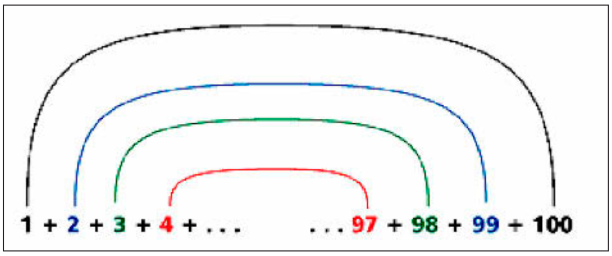

Fig. 1. Il "trucco" di Gauss per sommare rapidamente i primi 100 numeri naturali. Supponiamo di porre i numeri in fila, uno accanto all'altro, e di sommare gli elementi delle 50 coppie formate dal primo e dall'ultimo ($1 + 100 = 101$), dal secondo e dal penultimo ($2 + 99 = 101$), dal terzo e dal terzultimo ($3 + 98 = 101$), e così via. Evidentemente, il totale è dato da $S_{100} = 50 \times 101 = 5050$. In generale, per ottenere la somma dei primi n numeri, notiamo che la formula precedente può essere riscritta come $S_{100} = 100\ (100 + 1)/2$; sostituendo 100 con n si ricava l'equazione (1) nel testo.

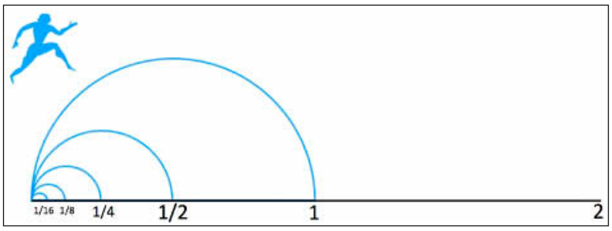

Fig. 2. Paradosso di Zenone dello stadio (o della dicotomia). Achille, per coprire una data distanza, deve prima percorrerne la metà, e prima ancora la metà della metà, e così via. Si vengono così a creare infiniti segmenti che, secondo Zenone, richiedono un tempo infinito per essere attraversati.

La conclusione che la somma degli infiniti numeri naturali sia infinita appare ovvia (ma si veda più avanti) e ancora più ovvia doveva sembrare agli antichi greci secondo i quali qualunque somma di infiniti addendi deve comunque tendere all'infinito, indipendentemente dal valore degli addendi stessi. Basandosi su questa (erronea) convinzione il filosofo greco Zenone di Elea (489-431 a.C.) formulò una serie di paradossi atti a dimostrare l'illusorietà del movimento; il più famoso di questi paradossi è senza dubbio quello di Achille e la tartaruga, secondo cui il piè veloce Achille non riesce a raggiungere la tartaruga benché questa si allontani assai lentamente. Noi consideriamo qui una variante, sempre ad

* Questa rubrica si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html.

opera di Zenone, nota come il paradosso della dicotomia, in cui la tartaruga è ferma. Secondo il filosofo greco, Achille, pur muovendosi alla velocità di 1 decametro al secondo, non riesce a coprire la distanza di 2 decametri che lo separano dalla tartaruga (nel seguito, tutte le distanze sono misurate in decametri per comodità; ogni altra scelta è legittima e non cambia la logica del discorso). Infatti, per giungere alla fine del percorso, deve prima raggiungere la metà di esso e prima ancora la metà della metà e così via. Questo processo produce un numero infinito di segmenti e Achille, secondo Zenone, ha bisogno di un tempo infinito per compierli tutti. In realtà, i segmenti, benché infiniti, sommati assieme devono necessariamente ridare il segmento di partenza. Pertanto

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2. \qquad (2)$$

Gli addendi di questa somma rappresentano anche i tempi impiegati da Achille per percorrere i vari segmenti (infatti, ad esempio, andando alla velocità data, il segmento ¼ è percorso in ¼ secondi); il tempo totale è dunque di 2 secondi, e coincide con il tempo ottenuto "classicamente", ossia t = distanza / velocità = 2 / 1 =2 s.

Abbiamo fin qui visto che esistono somme di infiniti addendi (dette *serie*) che valgono infinito (come la somma dei numeri naturali), ed altre – come l'eq. (2) – che convergono ad un valore finito. Ma il mondo delle serie è estremamente variegato e, come nel Paese delle Meraviglie di Alice, è possibile imbattersi in oggetti all'apparenza surreali, come la relazione

$$1+2+3+4+\ldots=-\frac{1}{12}. \qquad (3)$$

Questa relazione racchiude tre paradossi, in quanto la somma dei naturali sembra essere finita, frazionaria e negativa! Nonostante questo, essa è stata studiata da grandi matematici quali Eulero (1707-1783), Bernhard Riemann (1826-1866) e Srinivasa Ramanujan (1887-1920), ed è oggi accettata normalmente dai matematici moderni a patto di interpretarla correttamente. Nel livello avanzato cercheremo di chiarire il significato della relazione (3) sia pure approssimativamente, dal momento che l'esatta dimostrazione deriva da procedimenti matematici molto complessi e decisamente al di là dei limiti di questa nota. È tuttavia importante sottolineare che la relazione (3) trova riscontro in Natura, particolarmente nell'ambito della meccanica quantistica. Ne è un esempio il cosiddetto effetto Casimir.

Secondo la meccanica quantistica, lo spazio vuoto non è un desolato contenitore in cui non accade nulla, bensì un luogo "effervescente" in cui fotoni (ossia quanti di radiazione) e particelle appaiono e scompaiono come bollicine di spumante che affiorano in superficie. La reale esistenza di queste particelle virtuali (così dette a causa della loro effimera esistenza dell'ordine di 10^{-21} s) è stata messa in luce dall'effetto Casimir, teorizzato nel 1948 dal fisico olandese Hendrik Casimir (1909-2000) e confermato sperimentalmente una cinquantina d'anni dopo (ne abbiamo parlato in questa rubrica nel n. 4 del 2004). Due piastrine metalliche, poste parallelamente ad una certa distanza una dall'altra, individuano un volume in cui possono esistere solo fotoni le cui lunghezze d'onda siano sottomultipli della distanza tra le due superfici (Fig. 3); al contrario, nel resto dello spazio sono presenti fotoni di qualsiasi lunghezza d'onda la cui densità è dunque maggiore rispetto a quella tra le due piastrine. Questa differenza di densità si riflette in una differenza di pressione esercitata dai fotoni che urtano contro le superfici. Dal momento che la pressione esterna è maggiore di quella interna, si crea una forza che spinge le due superfici una contro l'altra. Questo effetto, inspiegabile in fisica classica, dimostra la reale esistenza delle particelle virtuali.

Benché selezionati nelle loro lunghezze d'onda, i fotoni nel volume sono comunque infiniti. Ad ogni lunghezza d'onda è associata una ben precisa energia e, visto che vi è un numero infinito di lunghezze d'onda permesse (Fig. 3), l'energia totale, derivante da una somma di infiniti termini del tipo 1 + 2 + 3 + …, risulta infinita. Naturalmente, questo non ha senso dal punto di vista fisico. Se però sostituiamo alla somma infinita il valore –1 / 12 come nella relazione (3), il risultato finale si accorda col valore sperimentale entro l'1%.

Le tecniche di manipolazione delle equazioni per liberarsi dei termini infiniti (come la relazione (3)) sono dette di *rinormalizzazione* o *regolarizzazione* e sono frequentemente usate in meccanica quantistica, dove non è difficile imbattersi in quantità infinite. Illustri premi Nobel, quali il fisico britannico Paul Dirac (1902-1984) e quello statunitense Richard Feynman (1918-1988), hanno chiaramente espresso il loro disagio nell'utilizzare le tecniche di rinormalizzazione, ritenendole un sotterfugio estraneo alla meccanica quantistica piuttosto che procedure naturalmente derivanti da essa. Più recentemente, tuttavia, la maggioranza dei fisici ha mostrato una tendenza all'accantonamento di queste perplessità dal momento che le tecniche di rinormalizzazione portano ad un accordo straordinario tra teoria ed esperimento. In fondo, quel che conta è che la somma dia il (giusto) totale.

Prima di arrivare a discutere la relazione (3) diamo in estrema sintesi alcune nozioni sulle serie infinite.

Nel livello base abbiamo incontrato la formula di Gauss per calcolare la somma parziale dei primi n termini della serie dei numeri naturali. Abbiamo visto che, aumentando il numero degli addendi, anche la somma parziale aumenta; con linguaggio un poco più tecnico, possiamo dire che, al tendere di n all'infinito, anche la somma tende all'infinito. Possiamo pertanto concludere che la serie infinita dei numeri naturali è divergente perché tende al-

l'infinito. Questo risultato è alquanto ovvio, e può sembrare che il metodo adottato per ottenerlo (calcolo della somma parziale e studio del suo comportamento all'aumentare di n) sia inutilmente farraginoso. In realtà, come vedremo tra poco, tale metodo mostra tutta la sua efficacia quando si tratta di analizzare serie meno banali.

Consideriamo ora la cosiddetta serie di Grandi, dal particolare comportamento "oscillante":

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad (4)$$

Chiaramente, al crescere del numero n degli addendi, la somma parziale "balla" tra 0 e 1 senza decidersi a schizzare verso infinito o a convergere verso un numero finito. Anche in questo caso diciamo che la serie è divergente.

Veniamo, infine, ad una serie che, sotto certe condizioni, risulta essere convergente, ossia assume un valore finito. Si tratta della serie geometrica

$$S = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$$

dove x rappresenta un qualsiasi numero. Per calcolare la somma parziale S_n dei primi n termini, scriviamo i seguenti passaggi (tenendo conto che $x^0 = 1$ e $x^1 = x$):

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n \\ &= 1 + x\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) \\ &= 1 + x\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) - x^{n+1} \\ &= 1 + x\,S_n - x^{n+1}. \end{aligned}$$

Nel primo passaggio abbiamo messo in evidenza una x; nel secondo abbiamo aggiunto $x^{n+1} - x^{n+1}$ (lasciando ovviamente inalterata la somma). Dopo l'ultimo passaggio precedente possiamo scrivere:

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

È chiaro che, se x ha un valore compreso nell'intervallo $-1 < x < 1$, allora x^{n+1} diventa sempre più piccolo al crescere di n. Pertanto, al tendere di n all'infinito la serie converge alla quantità:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1 - x}. \qquad (5)$$

Abbiamo scritto il valore della serie S come una funzione S(x) di x per sottolineare che esso dipende dal valore scelto per x. A titolo esemplificativo, ponendo $x = 1/2$ ne segue

$$S(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

Abbiamo ottenuto la serie considerata nel paradosso di Zenone, che pertanto risulta essere un caso particolare di serie geometrica. Ponendo invece $x = -1$ abbiamo

$$S(-1) = 1 - 1 + 1 - \ldots = \frac{1}{2} \qquad (6)$$

In questo caso abbiamo ricavato la serie di Grandi (eq. (4)) che ora però sembra convergere a ½. Il motivo di questo sorprendente risultato è dato dall'aver valutato S(x) per $x = -1$ benché, come si ricorderà, questa funzione rappresenti il valore della serie solo se $-1 < x < 1$. Non possiamo, in questa sede, discutere il significato profondo della valutazione di S(x) al di fuori dell'originario intervallo di x. Qui ci limiteremo a dire che la S(x), una volta definita tramite la serie geometrica (eq. (5)), "vive una sua vita autonoma" e nulla osta che possa essere valutata per qualunque valore di x (ad esclusione di $x = 1$, perché in questo caso diverge). Nel caso che x cada nell'intervallo originario, la serie associata a S(x) è effettivamente interpretabile come la somma di infiniti termini il cui risultato è proprio uguale al valore della funzione; in caso contrario, la serie non va intesa come una somma "classica", ma come una rappresentazione diversa (un modo di scrivere diverso) della S(x).[1] Benché tutto questo possa apparire un groviglio logico eccessivamente astratto, esso ha ricadute pratiche fondamentali in fisica quantistica, come abbiamo accennato nel livello base e come ci accingiamo a mostrare tra poco.

I passaggi che seguono sono intesi a dimostrare la relazione (3). Il lettore non interessato può saltarli e riprendere la lettura a partire dall'eq. (9).

Consideriamo la derivata della serie geometrica (eq. (5))

$$S' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \frac{1}{(1 - x)^2} \qquad (7)$$

Ponendo $x = -1$, otteniamo il seguente risultato, che utilizzeremo tra poco:

$$S'(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \frac{1}{4} \qquad (8)$$

Seguendo Eulero, definiamo ora la funzione ζ(x):

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots = 1 + 2^{-x} + 3^{-x} + \ldots$$

Si può dimostrare che questa serie converge per $x > 1$ (infatti in questo caso i termini successivi sono sempre più piccoli, una condizione necessaria, anche se non sufficiente, per la convergenza). Tuttavia, analogamente a quanto discusso per la funzione S(x), anche la funzione ζ(x) può essere estesa al di fuori dell'intervallo di convergenza, benché in questo caso la procedura sia un poco più complessa.[2] Ad esempio, per valutare ζ(–1) definiamo dapprima la serie ancillare

[1] In un certo senso, possiamo dire, analogamente, che, per esempio, x^2 è una diversa rappresentazione di $x \times x$. Questa notazione è stata poi estesa anche a esponenti non interi, per esempio, $x^{1/2}$ che però vale solo per $x > 0$. Un estensione a valori negativi è ancora possibile introducendo il numero immaginario $i = \sqrt{-1}$.

[2] La "dimostrazione" che viene data qui è approssimativa. La dimostrazione rigorosa è stata data da Riemann tramite la tecnica detta della "continuazione analitica" che prevede l'utilizzo dei numeri complessi, ossia numeri composti con il numero immaginario $i = \sqrt{-1}$.

$$2^{-x}\,\zeta\,(x) = 2^{-x} + 4^{-x} + 6^{-x} + \ldots$$

ed operiamo poi la seguente sottrazione

$$\begin{aligned}(1\text{-}2\times 2^{-x})\,\zeta(x) &= 1 + 2^{-x} + 3^{-x} + 4^{-x} + 5^{-x} + 6^{-x} + \ldots\\ &\quad -2\,(2^{-x} \qquad + 4^{-x} \qquad + 6^{-x} + \ldots\\ &= 1 - 2^{-x} + 3^{-x} - 4^{-x} + 5^{-x} - 6^{-x} + \ldots\end{aligned}$$

Ponendo $x = -1$, e tenendo conto dell'eq. (7), otteniamo

$$-3(1+2+3+\ldots) = 1-2+3-\ldots = \frac{1}{4}$$

da cui, finalmente

$$\zeta(-1) = 1+2+3+\ldots = -\frac{1}{12}. \qquad (9)$$

Dunque, il paradosso dell'eq. (3) cessa di essere tale se interpretiamo la serie come una rappresentazione di $\zeta(x)$ (in maniera analoga all'interpretazione data della relazione (6), ed anche della relazione (8)). Essa ha ricadute pratiche fondamentali nella meccanica quantistica, dove spesso ci si imbatte in quantità infinite. Un caso di scuola è dato dall'effetto Casimir, descritto brevemente nel livello base.

In quel che segue, per semplificare i calcoli, assumiamo che il volume tra le due piastre dell'esperimento di Casimir sia unidimensionale (valga cioè solo la dimensione lungo la distanza tra le piastre). Nello spazio vuoto esterno alle due piastre metalliche sono presenti fotoni virtuali di qualunque lunghezza d'onda. Tra le due piastre, invece, sono permessi solo fotoni la cui lunghezza d'onda è $\lambda = 2L/n$, dove L è la distanza tra le due piastre, e n è un qualunque numero naturale (Fig. 3). La meccanica quantistica ci dice che i fotoni virtuali presenti nello spazio vuoto hanno un'energia $E = h\nu/2$, dove h è la costante di Planck e ν è la frequenza. Dal momento che per le onde elettromagnetiche vale la relazione $\lambda\nu = c$ (dove c è la velocità della luce), possiamo scrivere l'energia di un fotone di fissata frequenza ν come $E = nhc/(4L)$. La densità di energia totale è data dalla somma delle energie di tutte le n frequenze:

$$\varepsilon = \frac{hc}{4L}(1+2+3+\ldots) = \frac{hc}{4L}\zeta(-1) = -\frac{hc}{48L}$$

La prima espressione, se considerata "classicamente", porta ad un valore infinito. Se però la interpretiamo come una rappresentazione di $\zeta(-1)$ (eq. (9)) otteniamo un valore finito. La densità ε può essere considerata come il lavoro compiuto contro la forza esterna per separare le due piastre ad una distanza L. Dalla fisica sappiamo inoltre che il lavoro è dato da "forza per spostamento"; pertanto $\varepsilon = F \times L$. Ne segue che la cosiddetta forza di Casimir è data da $F_{Casimir} = -hc/(48L^2)$, dove il segno negativo indica che la forza tende a comprimere il volume tra le due piastre.

Considerando lo spazio reale tridimensionale, si ottiene la "vera" forza di Casimir

$$F_{Casimir} = -\frac{\pi hcA}{480L^4}$$

dove A rappresenta la superficie di una piastra. Per $A = 1\ mm^2$ e $L = 1\ \mu m\ (= 10^{-4}\ cm)$ abbiamo $F_{Casimir} = 1{,}3 \times 10^{-9}$ N – pari a un decimilionesimo di grammo – in accordo entro l'1% con gli esperimenti. Questa forza è effettivamente molto piccola ma, come si vede dalla formula, cresce rapidamente al diminuire di L. Nel campo delle nanotecnologie la forza di Casimir può interferire con il corretto funzionamento dei nanorobot nel caso che alcune loro parti mobili siano troppo vicine.

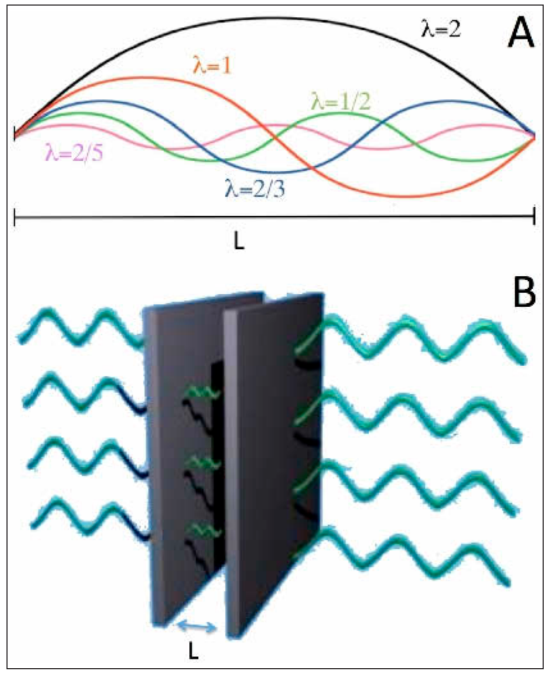

Fig. 3. A) Una corda (ad esempio, di chitarra) di lunghezza L, tesa e bloccata alle estremità, può supportare solo vibrazioni la cui semilunghezza d'onda $\lambda/2$ è un sottomultiplo di L: $n\lambda/2 = L$, dove n è un qualunque numero naturale. Pertanto, le lunghezze d'onda permesse sono quelle per cui $\lambda = 2L/n$. In figura sono rappresentate la vibrazione fondamentale ($n = 1$) e le successive quattro armoniche corrispondenti, rispettivamente, a $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ e $n = 5$. Le lunghezze d'onda sono espresse in unità di L. B) Esperimento di Casimir. Le oscillazioni del campo elettromagnetico dello spazio vuoto all'esterno delle due piastre hanno qualunque lunghezza d'onda, mentre quelle nello spazio tra le due piastre hanno solo lunghezze d'onda selezionate, come quelle della corda di chitarra illustrata nel pannello A.

Annibale D'Ercole si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio di Bologna (OAS), si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.