

# Spigolature astronomiche★

A cura di Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna

## Un tè con Einstein navigando sul fiume

Annibale D'Ercole

COM'È facile verificare, dopo aver messo in rotazione con un cucchiaino il tè contenuto in una tazza, le foglioline tendono a convergere al centro piuttosto che muoversi verso il bordo, come invece ci si aspetterebbe a causa della forza centrifuga. Questo fenomeno, noto come il *paradosso delle foglioline di tè*, era già conosciuto fin dalla metà dell'Ottocento, ma venne risolto soltanto nel 1926 da Albert Einstein in un articolo pubblicato sulla rivista *Die Naturwissenschaften*.

Quando il liquido viene messo in rotazione, la forza centrifuga lo spinge verso la parete costringendolo ad accumularsi contro di essa; ne segue un innalzamento del livello superficiale vicino al bordo, mentre il liquido si “abbassa” verso il centro della tazza (la forma della superficie è esattamente quella formata da una parabola in rotazione; si veda il livello avanzato). D'altra parte, la pressione in un liquido è tanto maggiore quanto maggiore è la profondità a cui ci si trova, a causa del maggior peso del liquido sovrastante; pertanto, la pressione sul fondo vicino alla parete della tazza è maggiore di quella al centro, dove il liquido è meno profondo. Questa differenza di pressione tende a spingere il liquido verso il centro; in condizioni di equilibrio, tale spinta è bilanciata dalla forza centrifuga, e nessun moto radiale si sviluppa.

Ma questo equilibrio è solo un'idealizzazione perché la rotazione del liquido vicino alla parete e nei pressi del fondo è rallentata a causa dell'attrito. Pertanto, in queste zone la forza centrifuga, che dipende dalla velocità di rotazione, risulta indebolita e la pressione sul fondo ha buon gioco nello spinge-

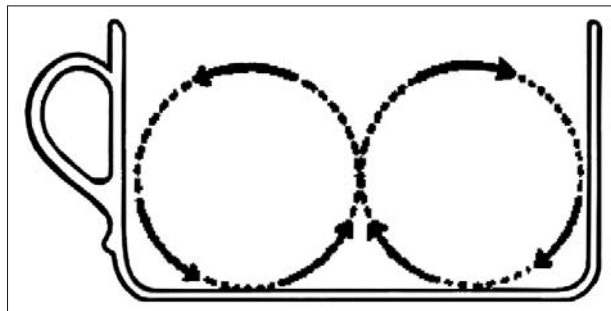


FIG. 1. Figura originale presente nell'articolo di Einstein del 1926. Viene illustrato il moto secondario che si innesca in una bevanda in una tazza quando la si mette in rotazione con un cucchiaino.

re il liquido verso il centro. Si innesca allora un *flusso secondario* che si sovrappone a quello *primario* (ossia quello circolare): vicino al fondo il liquido si muove dal bordo verso il centro, da qui risale verso l'alto per poi muoversi radialmente verso il bordo e scendere di nuovo in basso (FIG. 1). Le foglioline di tè seguono il moto radiale sul fondo, ma sono troppo pesanti per risalire e si accumulano al centro.

Può risultare sorprendente che Einstein “perdesse tempo” ad analizzare il moto di un liquido all'interno di una tazza. In realtà, lo scienziato era interessato a dare una spiegazione del perché tutti i fiumi, in misura maggiore o minore, sviluppano un percorso tortuoso piuttosto che essenzialmente rettilineo.<sup>1</sup> Come scrive egli stesso: «Non avendo trovato nessuno realmente in grado di fornire una spiegazione a questo fenomeno, penso che valga la pena darne una breve descrizione qualitativa». Einstein inizia allora descrivendo la dinamica del flusso di tè che abbiamo dato più sopra, e mette poi in luce le analogie di tale flusso con quello dell'acqua nel letto di un fiume.

Immaginiamo un fiume che segua inizialmente un percorso più o meno rettilineo (FIG. 2). Ogni pic-

<sup>1</sup> La tortuosità di un fiume è caratterizzata dall'*indice di sinuosità*  $i_s$  definito come il rapporto tra la lunghezza effettiva del fiume e la distanza che intercorre in linea d'aria tra la sorgente e la foce. Maggiore è la tortuosità di un fiume, maggiore è il suo indice di sinuosità; invece, un fiume perfettamente rettilineo avrebbe il minimo valore  $i_s = 1$ .

\* Questa rubrica si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi “fondamenti di astronomia”, volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/giornale.html>.

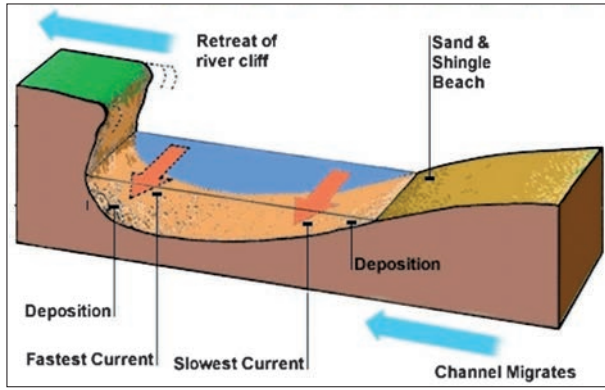


FIG. 2. Sezione dell'alveo di un'ansa di un fiume. Nel lato più profondo l'acqua scorre più velocemente a causa del minor attrito col fondo (freccia arancione sinistra) e la corrente è sufficientemente forte da riuscire ad erodere il bordo del fiume. Nel lato meno profondo, invece, il flusso più lento (freccia arancione destra) favorisce la sedimentazione dei detriti trascinati dal fiume piuttosto che l'erosione. Il risultato netto di erosione da un lato e sedimentazione dall'altro è un lento spostamento del letto del fiume nella direzione indicata dalle frecce azzurre.

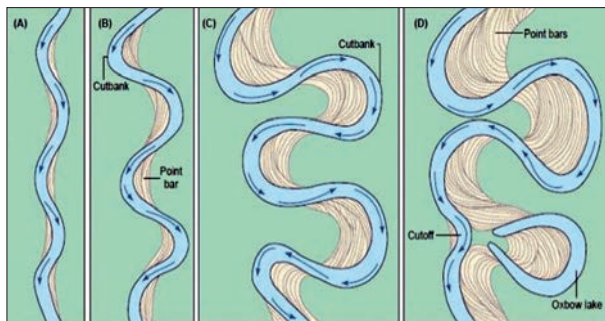


FIG. 4. La struttura sinuosa di un fiume evolve nel tempo (pannelli da A a D) a causa dell'erosione che si verifica nel lato esterno delle anse – dove la velocità è maggiore – e della sedimentazione che si accumula nel lato interno (indicata in marrone). Le anse diventano sempre più grandi e tendono a migrare più a valle. Può capitare che due meandri arrivino ad essere così vicini che la striscia di terra che li separa diventi sottile al punto da essere scavalcata dalla corrente (pannello D); il meandro isolato diventa sede di acqua stagnante e col tempo si trasforma in palude.

cola curva, per quanto modesta, produce delle differenze di velocità nel flusso dell'acqua; l'acqua che scorre nella parte concava (cioè esterna) della curva deve rimanere "al passo" con quella che costeggia il lato convesso (cioè interno) più corto, e deve dunque scorrere più velocemente rispetto a quest'ultima. La massa d'acqua contenuta nel fiume è soggetta alla forza centrifuga e tende a spostarsi verso il lato concavo, in analogia a quanto accade al tè che ruota nella tazza. Pertanto, lungo le curve dei fiumi, dette anche *anse* o *meandri*, si crea un flusso secondario che in superficie va dal lato interno a quello esterno, e in profondità scorre in direzione opposta in conseguenza dell'attrito col fondo che riduce l'azione della forza centrifuga.

La maggiore velocità di scorrimento implica una maggiore capacità di dilavare il bordo del fiume: pertanto sul lato esterno dell'ansa il fenomeno prevalente è l'erosione (FIG. 3). Viceversa, nel settore

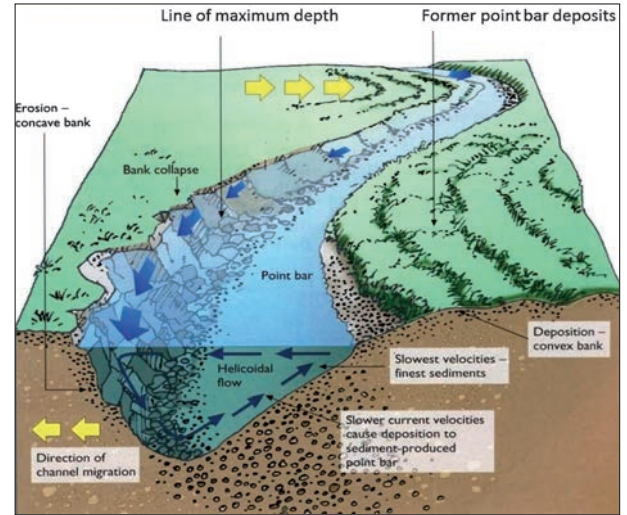


FIG. 3. Moto dell'acqua lungo un meandro. Le frecce azzurre grandi mettono in risalto come la velocità di scorrimento aumenti sul lato concavo (esterno) dell'ansa man mano che il flusso la percorre. Le frecce sottili azzurre, invece, illustrano il flusso secondario che, sovrappondendosi a quello primario (scorrimento lungo l'alveo) dà luogo ad un moto complessivo elicoidale la cui progressione ricorda quella della filettatura di una vite. Il flusso secondario è presente solo lungo le anse, dove agisce la forza centrifuga (si veda il testo), e contribuisce all'erosione del lato concavo e alla sedimentazione del lato convesso. Le tre frecce gialle in alto testimoniano del progressivo avanzamento degli strati sedimentari posti sul lato convesso (si veda anche la struttura a gradini del terreno in primo piano sulla destra), mentre le due frecce gialle indicano la direzione della migrazione del lato esterno a causa dell'erosione.

del fiume in prossimità del lato convesso la velocità della corrente è minore, e l'acqua non è in grado di erodere o trasportare materiale: viene quindi favorito il deposito del materiale alluvionale e prevale la sedimentazione. Il flusso secondario contribuisce a questo fenomeno rimuovendo materiale dal bordo esterno di un meandro e depositandolo sul lato interno del meandro successivo. Pertanto, mentre sul lato convesso si ha un progressivo accumulo di materiale e in quel settore il letto del fiume viene colmato, sul lato opposto la corrente erode gradualmente il bordo e l'alveo si espande. Il risultato complessivo è un'accentuazione della sinuosità del fiume con meandri che diventano sempre più ampi assumendo una curvatura a "laccio" e migrando lateralmente e verso valle.<sup>2</sup> Se un meandro si sposta più velocemente di uno adiacente, tra i due si sviluppa uno stretto "collo" di terra sempre più sottile destinato a venire scavalcato dal flusso d'acqua. Il flusso del fiume allora mantiene questa nuova direzione rettilinea, e l'ansa abbandonata, detta *lanca*, diventa una sorta di palude contenente acqua stagnante (FIG. 4).

<sup>2</sup> La migrazione verso valle è dovuta al fatto che l'acqua, come tutti i corpi, possiede un'inerzia e reagisce con un certo ritardo agli stimoli esterni. Così come, pur premendo l'acceleratore "a tavoletta", persino una Lamborghini impiega del tempo per raggiungere la velocità desiderata, ugualmente un elemento d'acqua raggiunge la sua massima velocità – e dunque la sua massima capacità di erosione – dopo aver superato il punto di massima curvatura, quindi più a valle.



FIG. 5. Esempi di meandri in avanzata fase evolutiva.

La realizzazione di lanche e meandri particolarmente sviluppati avviene preferibilmente in terreni con scarsa pendenza dove l'acqua del fiume, muovendosi lentamente, non è in grado di scavalcare sedimenti ed ostacoli, ma li evita procedendo a zig-zag (FIG. 5).

Abbiamo visto nel livello base che la superficie del tè in rotazione in una tazza assume una disposizione concava. Mostriamo qui che la superficie di un liquido in rotazione con velocità angolare costante all'interno di un contenitore cilindrico assume la forma di un paraboloide di rotazione, ossia una superficie che si ottiene facendo ruotare una parabola attorno al suo asse di simmetria.

Fissiamo l'attenzione su un piccolo elemento cubico di liquido posto sul fondo i cui lati sono pari a  $dr$  (FIG. 6). La massa di questo cubetto è  $dm =$

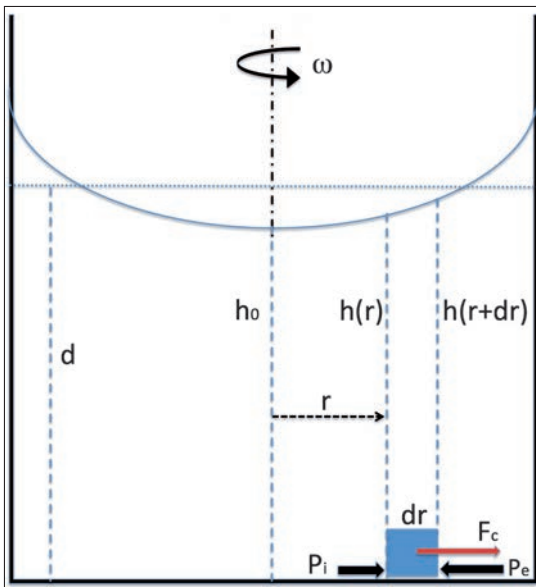


FIG. 6. Liquido in rotazione la cui superficie assume un profilo concavo (linea azzurra continua); la linea azzurra orizzontale indica la superficie dell'acqua in quiete. Il quadrato azzurro rappresenta un cubetto d'acqua di lato  $dr$ . Tutte le altre quantità indicate sono definite nel testo.

$\rho dr^3$ , dove  $\rho$  è la densità del liquido. Ammettendo che l'acqua ruoti come un corpo rigido, il nostro cubetto ruota con una velocità circolare  $u = \omega r$ , dove  $r$  è la sua distanza dall'asse di rotazione e  $\omega$  è la velocità angolare del liquido (ossia il numero di giri che compie nell'unità di tempo). È noto che, nel sistema di riferimento ruotante del liquido, il cubetto è sottoposto ad un'accelerazione centrifuga  $\omega^2 r$ , e dunque ad una forza centrifuga  $F_c = dm\omega^2 r$  che tende a spingerlo verso l'esterno. Come abbiamo detto nel livello base, in assenza di attrito si crea una situazione di equilibrio per cui la forza centrifuga è bilanciata dalla pressione. La pressione  $P(r)$  in un punto sul fondo a distanza  $r$  dal centro è data dal peso della colonna d'acqua di sezione unitaria che grava su quel punto:  $P(r) = g\rho h(r)$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità e  $h(r)$  è la profondità dell'acqua alla distanza  $r$ . Detta  $P_i = P(r)$  la pressione esercitata sulla faccia interna del cubetto e  $P_e = P(r + dr)$  quella esercitata sulla faccia opposta, la spinta radiale netta subita dal cubetto ad opera della pressione è  $F_p = (P_e - P_i)dr^2$ , dove  $dr^2$  rappresenta la superficie della faccia del cubetto. Essendo  $P_e > P_i$ ,  $F_p$  è rivolta verso il centro e si oppone alla forza centrifuga. Perché vi sia equilibrio è necessario che sia  $F_p = F_c$ , ossia

$$g\rho[h(r + dr) - h(r)]dr^2 = \rho dr^3 \omega^2 r,$$

da cui

$$\frac{h(r + dr) - h(r)}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r. \quad (1)$$

Si può facilmente verificare che la soluzione all'equazione (1) è data da

$$h(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - h_0, \quad (2)$$

dove  $h_0$  è la minima profondità dell'acqua (che si verifica a  $r = 0$ ). Infatti possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} h(r + dr) &= \frac{\omega^2}{2g} (r^2 + 2rdr + dr^2) + h_0 \\ &= \frac{\omega^2}{2g} r^2 (1 + 2x + x^2) + h_0 \quad (3) \\ &\approx \frac{\omega^2}{2g} r^2 (1 + 2x) + h_0, \end{aligned}$$

dove  $x = dr/r$ ; dal momento che  $dr \ll r$ , abbiamo  $x^2 \ll x \ll 1$  e possiamo trascurare il termine  $x^2$  nell'ultimo passaggio.

Utilizzando ora le equazioni (2) e (3) possiamo riscrivere il termine a sinistra dell'uguale dell'equazione (1), ottenendo proprio il termine a destra. Abbiamo pertanto verificato che l'equazione (2) rappresenta effettivamente l'andamento della profondità dell'acqua in funzione di  $r$ . Tale equazione descrive un paraboloide di rotazione, come anticipato all'inizio.



La costante  $h_0$  dipende dalla quantità d'acqua presente nel recipiente, e si può dimostrare che vale

$$h_0 = d - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, \quad (4)$$

dove  $R$  rappresenta il raggio del recipiente cilindrico e  $d$  è la profondità dell'acqua da ferma. Com'è intuitivo, la depressione centrale è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di rotazione.

Queste ultime righe sono dedicate ai lettori con qualche conoscenza di analisi matematica che non volessero limitarsi a verificare, ma fossero intenzionati a dimostrare le equazioni (2) e (4). In quest'ottica, cominciamo col notare che, per  $dr \rightarrow 0$ , l'espressione di sinistra nell'equazione (1) rappresenta la derivata di  $h(r)$  rispetto ad  $r$ :

$$\frac{dh(r)}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r.$$

La funzione  $h(r)$  può essere allora facilmente trovata integrando l'equazione precedente:

$$h(r) = \int \frac{dh(r)}{dr} dr = \frac{\omega^2}{g} \int r dr = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_0,$$

dove  $h_0$  è la costante di integrazione. Quest'ultima si trova notando che il volume iniziale  $V_i$  del fluido in quiete deve essere uguale al volume  $V_f$  del liquido in rotazione. Inizialmente il volume occupato è cilindrico:

$$V_i = \pi R^2 d.$$

Il volume del liquido in rotazione si calcola invece come

$$V_f = 2\pi \int_0^R r h(r) dr = 2\pi \left( \frac{\omega^2 R^4}{8g} + \frac{h_0 R^2}{2} \right).$$

Ponendo  $V_i = V_f$  si ottiene infine l'equazione (4).

---

**Annibale D'Ercole** si è laureato in Fisica all'Università di Roma "La Sapienza". Astronomo associato presso l'INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna, si occupa di simulazioni numeriche di idrodinamica, applicate alle nebulose e al gas interstellare delle galassie. È autore di numerosi articoli divulgativi pubblicati presso questa e altre riviste.