

L'esperimento EPR

Annibale D'Ercole

INAF · Osservatorio Astronomico di Bologna

È NOTO che, secondo la meccanica quantistica, un elettrone (o qualunque altra particella elementare) non occupa una posizione precisa come avviene in meccanica classica; al contrario, esso possiede una probabilità non nulla di trovarsi ovunque nello spazio. Questa probabilità è una caratteristica strutturale e non deriva dalla nostra eventuale ignoranza riguardo ai movimenti dell'elettrone. Solo una misura concreta di posizione può fare uscire l'elettrone da questa sorta di limbo quantistico, e "costringerlo" ad occupare un punto preciso. Questa interpretazione della realtà fisica dell'elettrone è dovuta principalmente a Niels Bohr e va sotto il nome di "interpretazione di Copenhagen", dalla città in cui ha operato il fisico danese.

Questa indeterminazione riguarda anche altre quantità concernenti l'elettrone, come, ad esempio, lo *spin*. Il momento angolare o *spin* di un corpo è sostanzialmente una misura della sua velocità di rotazione attorno ad un suo asse. (FIG. 1) Analogamente a quanto accade per la posizione, secondo l'interpretazione di Copenhagen lo *spin* dell'elettrone non possiede né una direzione né un valore definiti; anche in questo caso lo stato fisico dell'elettrone è indeterminato ed è dato da una confusa sovrapposizione delle diverse direzioni dell'asse di rotazione e dei possibili diversi valori della velocità di rotazione. Se però si sottopone l'elettrone ad una misura di *spin*, l'asse di rotazione dell'elettrone assume una direzione precisa, coincidente con quella dell'apparato di misura (FIG. 2).

* Questa rubrica si propone di presentare in modo sintetico e, per quanto possibile, autoconsistente argomenti che stanno alla base della conoscenza astronomica, spesso trascurati nella letteratura divulgativa, in quanto ritenuti di conoscenza generale oppure troppo difficili o troppo noiosi da presentare ad un pubblico non specialistico. Questi "fondamenti di astronomia", volutamente trattati in uno spazio limitato, possono essere letti a due livelli; eventuali approfondimenti per i lettori che desiderino ampliare la conoscenza dell'argomento vengono esposti in carattere corsivo e incorniciati. Si suggerisce questa rubrica, quindi, a studenti dei vari tipi e livelli di scuole. Le *Spigolature astronomiche* si possono trovare anche in rete, nel sito Web del «Giornale di Astronomia», <http://giornaleastronomia.difa.unibo.it/indici.html>.

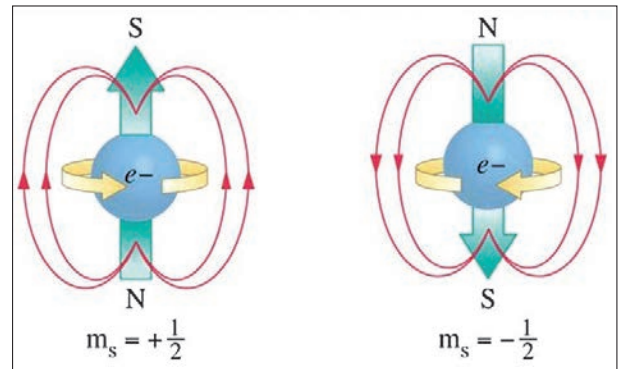


FIG. 1. A causa della loro rotazione, gli elettroni hanno un momento angolare (che è appunto una misura della quantità di moto rotatorio) pari a $\frac{1}{2} h$ se ruotano in senso antiorario e $-\frac{1}{2} h$ se ruotano in senso orario, dove h è la costante di Planck. Questo momento angolare è detto *spin* e viene generalmente indicato con $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$, omettendo la costante di Planck. Gli elettroni sono anche dotati di un dipolo magnetico il cui asse coincide con quello di rotazione. Dal punto di vista magnetico, gli elettroni sono assimilabili a microscopici aghi magnetici come quelli delle bussole.

Quanto all'entità dello *spin*, a seguito della misura esso (contrariamente a quanto avviene in fisica classica) può assumere solo due valori (in opportune unità): $\frac{1}{2}$ in caso di rotazione oraria, e $-\frac{1}{2}$ in caso di rotazione antioraria. L'elettrone "sceglie" l'uno o l'altro valore in maniera casuale e con pari probabilità (FIGG. 1 e 2).

Albert Einstein lottò tutta la vita contro l'interpretazione di Copenhagen. Egli riteneva che l'elettrone ha sempre una realtà fisica ben determinata (un preciso valore di *spin*, velocità e posizione), e non soltanto a seguito di una operazione di misura: «Veramente lei crede che la Luna sia lì solo quando la guarda?» ebbe a chiedere a un suo collaboratore. Nel tentativo di confutare le argomentazioni di Bohr, nel 1935 Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen pubblicarono un articolo in cui descrivevano un esperimento ideale il cui risultato, secondo la loro opinione, evidenziava una incongruenza della meccanica quantistica: questo esperimento è noto come l'esperimento EPR, dalle iniziali dei suoi tre autori.

Si consideri una sorgente iniziale con *spin* nullo che emetta due elettroni che si muovono in direzioni opposte verso due rivelatori di *spin*, uno (D) posto a destra e uno (S) a sinistra (FIG. 3). Interagendo col rivelatore S l'elettrone di sinistra esce dal suo limbo quantistico acquisendo, con scelta casuale, uno *spin* parallelo ($1/2$) o antiparallelo ($-1/2$) rispetto alla direzione del rivelatore. Contemporaneamente, l'elettrone di destra dovrà assumere uno *spin* opposto a quello del suo gemello per mantenere nullo lo *spin* totale del sistema¹ (questo è verificabile tramite il rivelatore D). L'informazione sullo *spin* da assumere deve dunque giungere all'elettrone istantaneamente, non importa quanto distante esso sia. Da questo argomento, EPR traggono la seguente conclusione: o la Natura è *non locale* (vi sono azioni in un posto che hanno ripercussioni immediate in un posto lontanissimo), oppure la meccanica quantistica è *incompleta* (essa non considera tutte le cause che concorrono a determinare lo stato di un sistema fisico).

Dato lo scetticismo di Einstein nei confronti della meccanica quantistica, non stupisce che EPR abbiano privilegiato l'ipotesi di incompletezza. Nella loro visione il carattere aleatorio della meccanica quantistica è dovuta al fatto che noi ignoriamo i meccanismi profondi che regolano il comportamento delle particelle, meccanismi controllati da variabili a noi ignote (almeno fino ad oggi) e che per questo vengono dette "nascoste". La meccanica quantistica è incompleta perché non considera queste variabili e supplisce a tale carenza ricorrendo a metodi statistici. Secondo questa interpretazione i due elettroni non si trovano affatto in un "limbo" indifferenziato in cui ogni possibile direzione dello *spin* è possibile. In realtà i due elettroni hanno *spin* ben determinati e sintonizzati tra loro "fin dalla nascita" (anche se noi non siamo in grado di calcolarli); viene quindi a cadere la necessità di una "spettrale" azione a distanza (come ebbe a chiamarla Einstein) che contraddica la teoria della relatività ristretta.

Secondo la Scuola di Copenhagen, invece, l'assenza di determinismo nella meccanica quantistica

¹ In assenza di forze che agiscono su di esso, un corpo in rotazione continua a girare sempre con la stessa velocità. Nel caso di un sistema di più corpi, l'assenza di forze esterne implica che la somma degli *spin* dei singoli corpi rimane costante.

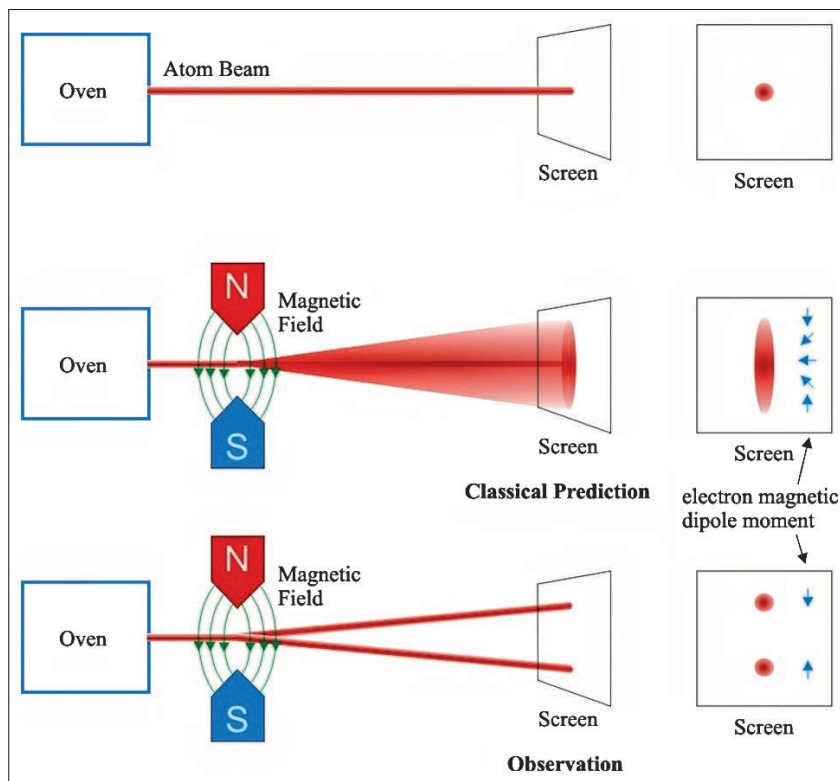


FIG. 2. Esperienza di Stern-Gerlach. Un fascio di elettroni inviati verso uno schermo (come nei tubi catodici dei vecchi televisori analogici) produce una macchia luminosa centrale. Se però il fascio attraversa un campo magnetico, esso tende ad "aprirsi" perché gli elettroni interagiscono con tale campo a causa del loro dipolo magnetico. La deflessione massima si ottiene quando il dipolo è allineato in maniera parallela o antiparallela al campo esterno. Secondo la fisica classica, elettroni i cui dipolo magnetico sia orientato ad angoli intermedi devono deflettere in misura minore; pertanto ci si aspetta che il fascio di elettroni si allarghi formando una sorta di ventaglio che produce una linea continua sullo schermo. L'esperienza invece mostra che il fascio originale si divide soltanto in due fasci secondari che formano due sole macchie sullo schermo, indicando che in realtà gli *spin* degli elettroni si pongono solo in maniera parallela o antiparallela rispetto al campo magnetico esterno, assumendo il valore $1/2$ o $-1/2$. Questo dimostra che gli *spin* acquisiscono la direzione dell'apparato di misura; in assenza di una misura non esiste una direzione definita, come stabilito dal Principio di Indeterminazione.

riflette l'aspetto genuinamente aleatorio della Natura. Le caratteristiche di un elettrone sono influenzate dall'operazione di misura e tale influenza si propaga istantaneamente all'altro elettrone che è stato creato in coppia col primo e il cui "destino" rimane in qualche modo intrecciato (*entangled*) con esso.

Stabilire quale delle due interpretazioni sia quella giusta sembrò a lungo un problema metafisico più che fisico. Ma nel 1964, circa trent'anni dopo la formulazione dell'esperimento EPR, il fisico scozzese John Bell ideò una modifica a tale esperimento e formulò una condizione matematica (la famosa "disuguaglianza di Bell") che permette di stabilire, mediante misure di laboratorio, l'interpretazione corretta (si veda qui il livello avanzato). Qualche anno dopo la formulazione di Bell, i progressi tecnologici hanno reso possibile la realizzazione dell'esperimento. In particolare, nei primi anni Ottanta, Alain Aspect in Francia, utilizzando fotoni invece di elettroni (la differenza è inessenziale per nostri scopi) ha mostrato la correttezza dell'interpretazione della Scuola di Copenhagen. Dunque, la Natura è effetti-

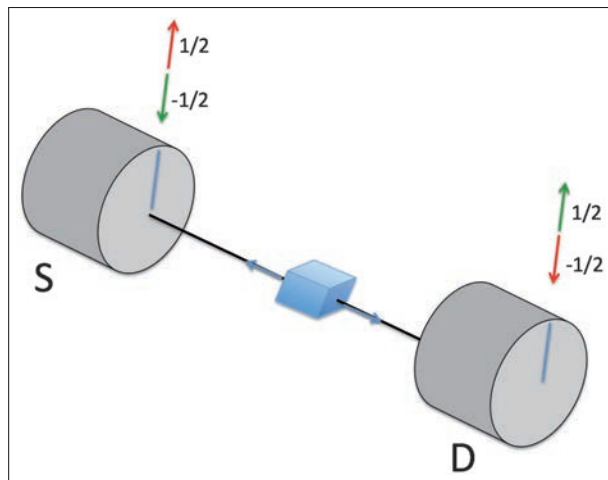


FIG. 3. L'esperimento ideale di EPR. La scatola azzurra rappresenta una sorgente che emette coppie di elettroni (ad esempio una sostanza radioattiva). Un elettrone della coppia si muove verso il rivelatore di sinistra (S), mentre l'altro verso quello di destra (D). Le due linee nei due rivelatori indicano la direzione lungo la quale vengono misurati gli spin. Se il rivelatore S misura il valore $1/2$ per l'elettrone di sinistra, "costringendolo" ad assumere una direzione verticale come illustrato in figura, si può verificare tramite il rivelatore D che anche l'elettrone di destra verrà istantaneamente costretto ad orientarsi verticalmente assumendo il valore $-1/2$ (freccie rosse), e viceversa (freccie verdi).

vamente non locale e una misura su un elettrone "qui" influenza istantaneamente anche l'elettrone gemello *entangled*, ovunque esso si trovi.

Il lettore con qualche conoscenza di relatività ristretta si troverà a disagio con questo risultato per due motivi. Il primo, più immediato, è dovuto al fatto che la comunicazione istantanea tra i due elettroni sembra violare la basilare nozione che nulla può viaggiare a velocità superiore a quella della luce. Il secondo motivo è il seguente: nella nostra discussione abbiamo assunto che il rivelatore S realizzi la sua misura un attimo prima del rivelatore D, influenzando così lo spin di entrambi gli elettroni. Ma secondo la relatività ristretta è possibile porsi in un sistema di riferimento in moto (rispetto all'apparato di misura) in cui il rivelatore D opera prima di S: non è dunque chiaro chi influenza chi nella realtà! Sebbene esistano risposte tecniche che riconciliano i risultati della relatività ristretta con quelli della meccanica quantistica, alcuni fisici ritengono che la relazione tra queste due teorie sia una questione ancora aperta. A ottant'anni dalla sua formulazione il paradosso EPR non smette di far discutere.

Allo scopo di dirimere su base sperimentale se la fisica delle particelle abbia natura non locale (come sostenuto dalla Scuola di Copenhagen) o meno (come affermato da EPR), Bell modificò l'apparato sperimentale ideale di EPR descritto nel livello base. Mentre EPR considerarono la misura dello spin lungo un'unica direzione (FIG. 3), Bell introdusse la possibilità di ruotare i rivelatori in modo che cia-

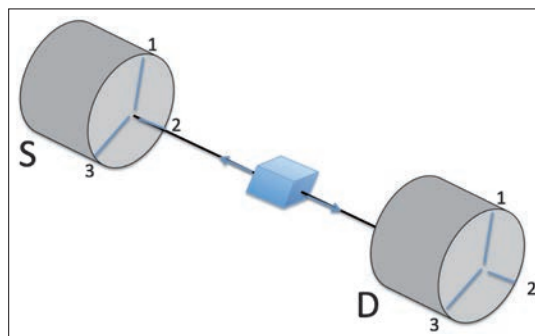


FIG. 4. Modifica dell'esperimento di EPR. I due rivelatori sono liberi di ruotare e di assumere, ad ogni emissione di una coppia di elettroni, ciascuno una direzione casuale tra le tre possibili, separate tra loro da un angolo di 120° .

scuno di essi potesse misurare lo spin lungo altre due direzioni complanari tra loro, una ruotata di 120° in senso orario ed una ruotata di 120° in senso antiorario rispetto alla prima (FIG. 4). Quando una coppia di elettroni viene emessa, il rivelatore di sinistra S viene ruotato casualmente facendogli assumere una direzione a caso tra le tre possibili che battezziamo S1 (direzione verticale), S2 (direzione ruotata di 120° in senso orario rispetto a S1) e S3 (direzione ruotata di 120° in senso antiorario rispetto a S1). Anche il rivelatore di destra, D, viene fatto ruotare e si posiziona casualmente lungo una delle tre possibili direzioni D1, D2 o D3.

Già sappiamo che, nel caso i due rivelatori assumano la stessa direzione, gli spin dei due elettroni sono orientati in direzione opposta per la conservazione del momento angolare; possiamo sintetizzare questo risultato matematicamente mediante la variabile Σ definita come il modulo² della somma algebrica dei due spin:

$$\Sigma = |1/2 - 1/2| = |-1/2 + 1/2| = 0.$$

In sintesi, ogni volta che si realizza una delle tre coppie di posizioni (S1, D1), (S2, D2), (S3, D3), si ottiene $\Sigma = 0$.

Vediamo ora che succede se i due rivelatori sono ruotati lungo direzioni diverse. In particolare, cerchiamo di capire quale risultato ci dobbiamo attendere nel caso fosse corretta l'interpretazione delle variabili nascoste sostenuta da EPR. Supponiamo allora che la Natura abbia programmato gli elettroni in maniera tale che, ad esempio, essi mostrino lo stesso spin se misurato dai rivelatori in posizione 1 o 3, e opposto se misurato dai rivelatori nella posizione 2. Se, ad esempio, l'elettrone a sinistra risulta avere spin $1/2$ dopo la misura del rivelatore S1, per quanto detto più sopra l'elettrone di destra risulterà avere spin $-1/2$ se misurato dal rive-

² Se a è un numero reale qualsiasi, allora il modulo $|a|$ rappresenta il numero stesso se questo è positivo oppure nullo, invece il numero opposto se esso è negativo. Ad esempio, $|5-3| = |3-5| = 2$.

latore nella configurazione D1 o D3, e spin $\frac{1}{2}$ se misurato nella configurazione D2. Gli stessi risultati, ma con segno invertito, si otterrebbero nel caso che la misura del rivelatore S1 dia spin $-\frac{1}{2}$.

Una volta ruotati a caso, i due rivelatori possono realizzare 9 possibili combinazioni: (S1, D1), (S1, D2), (S1, D3), (S2, D1), (S2, D2), (S3, D3), (S3, D1), (S3, D2), (S3, D3). Prendiamo ad esempio il caso (S1, D2); per quanto detto nel paragrafo precedente, l'elettrone a destra mostrerà lo stesso spin dell'elettrone a sinistra, sia che quest'ultimo mostri spin positivo o negativo: in entrambi i casi otterremo

$$\Sigma = |1/2 + 1/2| = |-1/2 - 1/2| = 1.$$

Combinazioni diverse dell'orientamento dei due rivelatori danno luogo a diversi valori di Σ . Le possibili combinazioni e i relativi valori di Σ sono riportati nella tabella.

	S1	S2	S3
D1	0	1	0
D2	1	0	1
D3	0	1	0

Risulta chiaro che il valore $\Sigma = 0$ si realizza in 5 casi su 9, e il valore $\Sigma = 1$ in 4 casi su 9. Dunque, una volta emessi due elettroni e posizionati a caso i due rivelatori, il risultato $\Sigma = 0$ ha una probabilità $P = 5/9$ di realizzarsi. Questo significa che se ripetiamo l'esperimento 9 milioni di volte, riposizionando ogni volta in maniera casuale i due rivelatori, ci aspettiamo che il valore $\Sigma = 0$ si realizzi circa 5 milioni di volte (naturalmente, tanto maggiore è il numero di esperimenti, tanto più esattamente il numero dei risultati con $\Sigma = 0$ rappresenta i $5/9$ del totale).

La tabella è stata ottenuta avendo assunto che gli elettroni mostrino lo stesso spin per le disposizioni 1 e 3 dei rivelatori. In realtà questa scelta è inessenziale: il lettore può verificare che, se avessimo ipotizzato che la stessa misura di spin si realizza per le disposizioni 1 e 2, oppure 2 e 3, avremmo ottenuto tabelle in cui la posizione degli 1 e 0 sono diverse, ma rimarrebbe sempre vero che la probabilità di ottenere $\Sigma = 0$ è $P = 5/9$.

Riassumiamo e concludiamo il ragionamento di Bell. Ogni volta che la sorgente centrale emette due elettroni, il loro spin è preordinato "alla nascita" tramite meccanismi deterministici che però noi ignoriamo. Questa ignoranza ci induce a fare previsioni di tipo statistico riguardo ai risultati che si ottengono nell'esperimento ideale di Bell. Noi non sappiamo come sia "programmata" ciascuna sin-

gola coppia di elettroni al momento della loro creazione; per alcune lo spin di ciascun elettrone potrebbe risultare sempre lo stesso per ogni direzione dei rivelatori: in questo caso il risultato $\Sigma = 0$ si realizzerebbe con certezza, ovvero con probabilità $P = 1$. Nel caso invece in cui gli elettroni dovessero manifestare lo stesso spin solo per due disposizioni su tre dei rivelatori, la probabilità di ottenere $\Sigma = 0$ è $P = 5/9$. Quindi, nonostante la nostra completa ignoranza riguardo al meccanismo "nascosto" che di volta in volta determina la condizione degli spin della coppia di elettroni emessi, possiamo dire con certezza che la probabilità di ottenere $\Sigma = 0$ è $P > 0,5$. È questa la celebre "disuguaglianza di Bell".

Vediamo ora quale debba essere il valore di P secondo l'interpretazione di Copenaghen. Prima di affrontare il cuore del problema, consideriamo il comportamento dello spin di un elettrone in determinate condizioni. Iniziamo definendo un "filtro" ideale che lasci passare solo elettroni il cui spin sia orientato in una determinata direzione. Dal punto di vista concettuale la realizzazione di tale filtro è assai semplice. Abbiamo visto che l'apparato di Stern-Gerlach divide un fascio di elettroni in due fasci contenenti ognuno la metà degli elettroni del fascio originario: ciascun fascio è composto esclusivamente da elettroni con spin positivo (su) o negativo (giù) (FIG. 2). È allora sufficiente bloccare uno dei due fasci (non ha importanza qui specificare come) per realizzare un dispositivo – un filtro, appunto – che lascia passare solo elettroni "su" oppure "giù" allineati secondo l'orientamento del filtro stesso.

La FIG. 5 illustra il comportamento degli elettroni a seguito della loro interazione con una combinazione di filtri. Dopo l'attraversamento di un filtro orientato verticalmente, si realizza un fascio di elettroni "su" composto dalla metà degli elettroni originari. Questo fascio attraversa un secondo filtro, anch'esso orientato verticalmente: se anche questo filtro è "su" esso verrà attraversato dal 100% degli elettroni, se invece è "giù" il fascio verrà completamente bloccato. Nel caso in cui la direzione del secondo filtro sia ortogonale allo spin degli elettroni in arrivo, questi ultimi, interagendo col filtro, orientano il loro spin per il 50% parallelamente e per il 50% antiparallelamente al filtro stesso. L'equipartizione è ovviamente dovuta a motivi di simmetria. Tale simmetria viene a mancare se il secondo filtro è ruotato di un angolo θ qualsiasi rispetto allo spin degli elettroni in entrata; in questo caso la frazione di elettroni in uscita con spin parallelo al filtro è $\cos^2(\theta/2)$, mentre la frazione con spin antiparallelo è $1 - \cos^2(\theta/2) = \sin^2(\theta/2)$.

Siamo ora in grado di analizzare l'esperimento di Bell nell'ottica della Scuola di Copenaghen. Consideriamo il caso particolare illustrato in FIG. 6. Si assume che l'elettrone di sinistra risulti avere spin

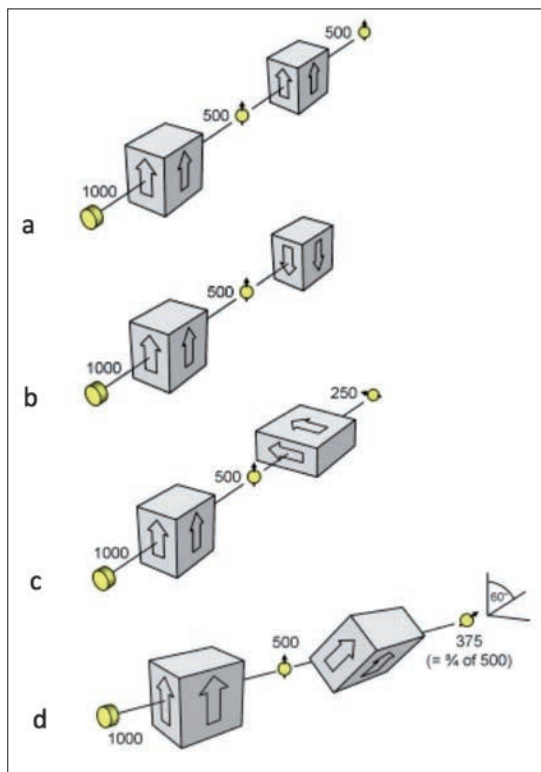


FIG. 5. Comportamento degli elettroni a seguito dell'interazione con una combinazione di filtri. a) Solo metà degli elettroni del fascio iniziale attraversano il primo filtro acquisendo uno spin parallelo al filtro stesso. Se poniamo un secondo filtro con stessa direzione e stesso verso del primo, tutti gli elettroni selezionati dal primo filtro lo attraversano senza impedimenti perché il loro spin è parallelo al filtro; b) Se invece il secondo filtro è antiparallelo al primo, nessun elettrone lo attraversa; c) Se il secondo filtro è posto ortogonalmente al primo, esso "costringe" gli elettroni a porre il loro spin parallelamente al filtro stesso. Solo la metà degli elettroni che acquisisce lo spin nello stesso verso del filtro attraversano quest'ultimo; d) Se la direzione del secondo filtro forma un angolo θ con la direzione degli spin degli elettroni in arrivo, la meccanica quantistica prevede che solo una frazione $\cos^2(\theta/2)$ di quest'ultimi attraversa il filtro acquisendo uno spin parallelo al filtro stesso. Nel caso particolare illustrato in figura ($\theta = 60^\circ$), $3/4$ degli elettroni fuoriescono dal filtro con lo spin parallelo a quest'ultimo, e $1/4$ con spin antiparallelo (questi ultimi non mostrati in figura).

$1/2$ a seguito della misura ad opera del rivelatore S ruotato nella posizione S1. L'elettrone destro è dunque "costretto" ad acquisire uno spin antiparallelo a quello del compagno. Il rivelatore D può assumere tre diverse posizioni. Nell'eventualità che sia anche lui posizionato in D1, si riproduce il caso dell'esperimento originario di EPR: la probabilità di ottenere una misura pari a $-1/2$ per lo spin dell'elettrone di destra è in questo caso pari a 1. Se invece il rivelatore D è posizionato in D2 la sua direzione forma un angolo $\theta = 60^\circ$ con lo spin dell'elettrone in arrivo; è facile verificare, per quanto detto più sopra, che la probabilità del rivelatore di misurare

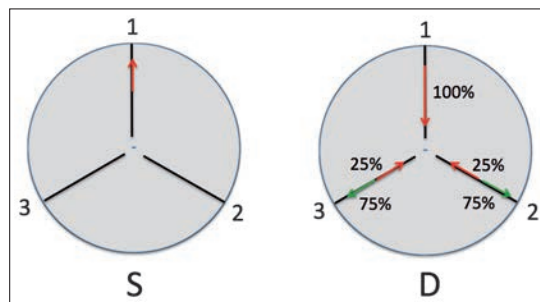


FIG. 6. Possibili realizzazioni dell'esperimento di Bell. Si supponga che il rivelatore S, in posizione 1, abbia misurato lo spin dell'elettrone di sinistra pari a $1/2$ (freccia rossa a sinistra); lo spin dell'elettrone di destra assume istantaneamente il valore $-1/2$ lungo la stessa direzione. Se il rivelatore D è in posizione 1, esso misurerà lo spin $-1/2$ con probabilità 100% (come nel caso illustrato in FIG. 3); se il rivelatore D è in posizione 2, avrà una probabilità del 25% di misurare uno spin $-1/2$ (si veda il testo e il caso d della FIG. 5); lo stesso vale per la posizione 3. Le frecce verdi indicano il verso degli spin $1/2$ la cui probabilità di essere misurati è 75%.

uno spin $-1/2$ vale, in questo caso, 0,25. La stessa probabilità si ha anche nel caso che il rivelatore D sia ruotato nella posizione D3.

Possiamo dunque riassumere la precedente analisi nel modo seguente. Supponiamo che vi siano N coppie di elettroni per cui lo spin dell'elettrone di sinistra risulta pari a $1/2$ dopo essere stato misurato dal rivelatore S in posizione 1. Statisticamente, il rivelatore D misurerà lo spin di $1/3$ degli N elettroni in ognuna delle tre posizioni D1, D2 e D3. Il numero totale di spin $-1/2$ si ottiene dal contributo delle tre posizioni, e sarà dunque

$$1 \times N/3 + 0,25 \times N/3 + 0,25 \times N/3 = 0,5 \times N.$$

Questo significa che si ottiene $\Sigma = 0$ nel 50% dei casi, ossia la probabilità di avere $\Sigma = 0$ è pari a $P = 0,5$. Lo stesso risultato si ottiene se si assume che il rivelatore di sinistra operi in posizione S2 o S3.

In conclusione, l'esperimento proposto da Bell è in grado di distinguere, sulla base di misure fisiche, quale delle due interpretazioni della meccanica quantistica sia quella valida. Nella visione di EPR delle variabili nascoste ci si aspetta che, dopo un gran numero di misure, il risultato $\Sigma = 0$ si realizzi in più del 50% dei casi (disuguaglianza di Bell). Secondo la Scuola di Copenhagen, invece, le regole statistiche cambiano a causa della comunicazione tra i due elettroni, e il risultato $\Sigma = 0$ è aspettato nel 50% dei casi.

Una volta realizzato in laboratorio, l'esperimento proposto da Bell ha stabilito che $P = 0,5$, dando ragione alla Scuola di Copenhagen e sancendo il carattere non locale del mondo microscopico.